MÉCANIQUE VIBRATOIRE

Systèmes discrets linéaires

MICHEL DEL PEDRO
PIERRE PAHUD

PRESSES POLYTECHNIQUES ROMANDES

MÉCANIQUE VIBRATOIRE

MÉCANIQUE VIBRATOIRE

Systèmes discrets linéaires

MICHEL DEL PEDRO
Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

PIERRE PAHUD
Adjoint scientifique au Laboratoire des machines-outils et automates de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne



PRESSES POLYTECHNIQUES ROMANDES

La collection de **Mécanique** est dirigée par
Michel Del Pedro, professeur à l'Ecole polytechnique
fédérale de Lausanne

Dans la même collection:

Vibrations aléatoires et analyse spectrale
(à paraître)
André Preumont

Si vous désirez être tenu au courant des publications de l'éditeur de cet ouvrage, envoyez vos nom, prénom et adresse aux Presses polytechniques romandes, Centre Midi, CH-1015 Lausanne, Suisse, qui vous feront parvenir leur catalogue général.

Première édition
ISBN 2-88074-158-0

PRÉAMBULE

Objectifs

Le présent ouvrage correspond au cours de mécanique vibratoire donné aux étudiants des sections de mécanique et de microtechnique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Il s'agit d'un cours de base, au niveau du deuxième cycle, nécessaire pour la bonne compréhension des disciplines suivantes:

- vibrations des systèmes continus linéaires (poutres, plaques, ...),
- vibrations aléatoires des systèmes linéaires,
- vibrations des systèmes non linéaires,
- dynamique des structures,
- méthodes expérimentales, modèles rhéologiques, etc...

Ces disciplines ont déjà fait ou feront l'objet d'autres publications par les *Presses polytechniques romandes* (voir référence [23] de la bibliographie).

Ainsi, les objectifs recherchés sont avant tout pédagogiques: il s'agit de mettre à disposition des étudiants un cours donnant, de manière suffisamment complète et rigoureuse, les bases théoriques de la mécanique vibratoire des systèmes discrets linéaires. Ce cours, illustré de nombreux exemples d'application, convient également aux ingénieurs de la pratique industrielle qui désirent raffermir ou compléter leurs connaissances. Le style adopté doit permettre une lecture aisée par une personne travaillant seule.

Descriptif

L'ouvrage a pour objet les vibrations des systèmes mécaniques linéaires ne comportant qu'un nombre fini de degrés de liberté (systèmes discrets linéaires). Ils appartiennent à l'une des deux catégories suivantes:

- systèmes de solides considérés comme indéformables, soumis à des forces élastiques et des forces résisitives linéaires (forces de résistance visqueuse),
- systèmes continus déformables discrétisés, c'est-à-dire remplacés de manière approchée, sur la base de méthodes numériques ou expérimentales, par des systèmes ne comportant qu'un nombre limité de degrés de liberté.

Le comportement de l'oscillateur élémentaire – un seul degré de liberté – est d'abord étudié de manière détaillée. Une connaissance approfondie de ce comportement est en effet indispensable à la bonne compréhension des systèmes complexes. Les régimes libre, permanent et forcé sont établis en prenant chaque fois en considération un amortissement sous-critique, critique et surcritique. La puissance consommée par l'oscillateur est analysée avec soin et une interprétation énergétique originale des

réponses impulsionnelle et indicielle est proposée. Deux notions sont introduites: celle de réponse en fréquence, la plus fréquemment utilisée en mécanique vibratoire, et celle d'admittance, ou fonction de transfert, habituellement employée en théorie du réglage. L'analogie électrique force-courant et la notion de circuits de force sont brièvement traitées.

L'oscillateur à deux degrés de liberté est ensuite abordé, l'accent étant mis sur le régime libre conservatif et l'analyse du couplage élastique. D'autre part, un exemple classique de régime permanent, celui de l'amortissement de Frahm, fait l'objet d'une étude d'optimisation.

Le concept d'oscillateur discret linéaire généralisé, comportant un nombre *n* quelconque mais fini de degrés de liberté, est introduit sur la base des formes quadratiques de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de la puissance totale consommée. Les formulations de Lagrange et de Hamilton sont utilisées pour établir le système différentiel linéaire du second ordre, comportant *n* variables. Les solutions sont établies et analysées de manière systématique, par ordre croissant de complexité, c'est-à-dire en prenant en considération successivement des amortissements nuls, proportionnels (hypothèse de Caughey) et quelconques. Les notions de base modale, de modes réels et de modes complexes, analysées de façon rigoureuse, sont rendues aussi naturelles que possible sur le plan physique. Un exemple original de visualisation des modes complexes est traité complètement. Enfin, l'ouvrage se termine par l'exposé des principes de l'analyse mode modale expérimentale.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Mesdames *Christine Benoit* et *Claudine Candaux* pour la dactylographie du manuscrit, Monsieur *José Dias Rodrigues* pour sa participation au dernier chapitre et Monsieur *Jean-François Casteu* pour la préparation des figures.

Ils remercient tout particulièrement Monsieur *Martin Schmidt* qui a assuré la critique et le contrôle du texte ainsi que la correction des épreuves.

Lausanne, mars 1988

Pierre PAHUD Michel DEL PEDRO

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 BREF HISTORIQUE

Les phénomènes vibratoires jouent un rôle déterminant dans presque toutes les branches de la physique: mécanique, électricité, optique, acoustique, etc. Malgré leur grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique.

L'Homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il a construit les premiers instruments de musique.

Les musiciens et les philosophes cherchèrent les lois de la production du son et les appliquèrent à la construction des instruments de musique. Par exemple, Pythagore (582–507 av. J.-C.) a prouvé expérimentalement que si deux cordes sont identiquement tendues, les tons qu'elles produisent diffèrent d'un octave quand la longueur de l'une est le double de la longueur de l'autre.

Malgré les connaissances acquises par les Anciens, il faut attendre le début du 17e siècle pour que Galilée (1564–1642) démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence des vibrations. Le phénomène de battement fut mis en évidence par Sauveur (1653–1716) à la fin du même siècle. C'est Bruck Taylor (1685–1731) qui a, pour la première fois, retrouvé par voie mathématique les résultats expérimentaux de Galilée et d'autres chercheurs.

Plusieurs mathématiciens renommés ont étudié le problème de la corde vibrante. Citons D. Bernoulli (1700–1782), d'Alembert (1717–1783), Euler (1707–1783), Lagrange (1736–1813) et Fourier (1768–1830). Leurs études ont montré qu'une corde peut vibrer latéralement de différentes façons appelées modes de vibrations. Le premier mode correspond à la fréquence la plus basse.

La déformée de la corde est une demi-sinusoïde. Le second mode correspond à une fréquence double de celle du premier et à une déformation sinusoïdale de la corde qui présente donc un «nœud» en son milieu.

Sauveur donna le nom de fondamentale à la plus basse fréquence et celui d'harmoniques aux fréquences plus élevées.

La superposition linéaire des harmoniques fut proposée pour la première fois par Bernoulli. Enfin, Fourier présenta en 1822 son mémoire célèbre sur la théorie des séries harmoniques.

D'Alembert établissait vers 1750 l'équation différentielle régissant les vibrations d'une corde. On a reconnu plus tard le caractère ondulatoire de cette équation qui porta dès lors le nom d'«équation des ondes».

A partir de la loi de Hooke (énoncée en 1676), Euler et Bernoulli ont étudié les vibrations des poutres. Leurs calculs étaient basés sur la conservation de l'énergie.

Cette méthode a été développée plus tard par Lord Rayleigh (1842–1919) et porte depuis son nom. L'étude des vibrations des plaques et des membranes a été abordée beaucoup plus tard, en particulier par Kirchhoff (1824–1887) et Poisson (1781–1840).

Parmi les chercheurs contemporains, mentionnons Stodola (1859–1943) qui a établi une méthode d'analyse des vibrations des poutres lors de ses travaux sur les vibrations des aubes de turbines.

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des ordinateurs ainsi que des méthodes expérimentales a permis des progrès importants de la mécanique vibratoire. Il est maintenant possible d'aborder l'étude de systèmes complexes, soumis à des sollicitations quelconques, déterministes ou aléatoires.

Comme nous l'avons dit, les premiers phénomènes vibratoires étudiés concernaient la création et la transmission du son. On s'intéressa plus tard aux vibrations de systèmes mécaniques, mais c'est avec l'adoption du courant alternatif, comme agent de transport énergétique, que l'étude des phénomènes oscillatoires acquit un intérêt exceptionnel.

Il n'est dès lors pas étonnant que ce soient les électriciens qui, prenant la relève des mécaniciens et physiciens, aient mis au point les méthodes de calcul les plus commodes et les plus fructueuses. Ces méthodes ont été transposées depuis à l'étude des vibrations mécaniques et acoustiques. Il s'est ainsi dégagé progressivement une théorie générale des vibrations, indépendante de leur support physique. Signalons par ailleurs que les vibrations posent souvent des problèmes de stabilité pouvant être abordés avec les critères classiques de la théorie du réglage.

1.2 VIBRATIONS PERTURBATRICES OU UTILES

Très longtemps, on a étudié les vibrations des machines et des structures presque uniquement dans le but de les atténuer et, si possible, de les supprimer. Cette préoccupation est encore essentielle mais n'est plus la seule. On construit actuellement de plus en plus de machines ou d'appareils qui utilisent les vibrations mécaniques pour remplir la fonction désirée.

Voici quelques exemples où les vibrations sont un élément perturbateur et doivent être combattues.

- Les vibrations des machines ou de certains organes de machines sont une cause d'imprécision, de bruit, d'usure prématurée et de fatigue. On entend par fatigue des matériaux un processus de création et de développement de fissures, entraînant finalement la rupture franche de la pièce. D'autre part, les vibrations occasionnent, en raison de l'existence des résistances passives, une dissipation d'énergie nuisible au rendement.
- Les vibrations des voitures, des avions, des trains ou des bateaux provoquent, en plus des inconvénients précédents, l'inconfort des voyageurs et diminuent parfois gravement la sécurité de conduite de ces véhicules. Le shimmy des voitures, le lacet des locomotives, le tangage des bateaux et l'instabilité vibratoire des ailes d'avions appartiennent à ce genre de phénomènes.
- Les vibrations des grandes structures métalliques peuvent prendre, dans certains cas, des proportions catastrophiques. Rappelons la rupture du pont

suspendu de San Francisco entraînée par la résonance des oscillations dues au vent.

On peut dire, au sujet des vibrations perturbatrices, que tout mouvement primaire est une source de vibrations. Il est remarquable de constater qu'une petite modification constructive peut amener une diminution notable ou la complète disparition des vibrations. Cela ne signifie pas qu'il soit toujours facile de corriger une machine ou une structure existante, mais cela prouve la nécessité de se préoccuper des vibrations dans tout projet de construction. Le problème peut se résumer ainsi: déceler les sources de vibrations, étudier la transmission des vibrations au reste de la construction, rechercher les possibilités de résonance puis imaginer les moyens d'atténuer le phénomène.

Au contraire, dans les machines et appareils utilisant les vibrations, il s'agit d'optimiser le rendement de la source de ces vibrations. Il faut également choisir le type de vibrations convenant le mieux à la fonction désirée et s'assurer que les organes de transmission ne subissent pas une fatigue exagérée. Voici quelques exemples de ce type de machines et d'appareils:

- bourreuses-niveleuses pour l'entretien automatique de voies de chemin de fer,
- vibreurs mécaniques et ultrasoniques de toutes natures,
- transporteurs à vibrations,
- polisseuses à vibrations,
- lithotripteur (appareil médical servant à la fragmentation des calculs rénaux).

CHAPITRE 2

L'OSCILLATEUR ÉLÉMENTAIRE LINÉAIRE DE LA MÉCANIQUE

2.1 DÉFINITION ET REPRÉSENTATION

On désigne sous le nom d'*oscillateur élémentaire linéaire* un système mécanique à un degré de liberté dont le comportement en fonction du temps est traduit par une équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants.

Rappelons qu'un système mécanique possède un seul degré de liberté quand sa configuration peut être, à chaque instant, caractérisée par une seule variable. Plus généralement, un système possède n degrés de liberté si le nombre minimum de variables permettant de définir sa configuration est égal à n.

Le système est qualifié de linéaire quand il peut être décrit au moyen d'équations différentielles linéaires.

L'oscillateur mécanique élémentaire comprend les éléments représentés par la figure 2.1, soit:

- une *masse* m indéformable,
- un *ressort* sans masse qui fournit une force élastique proportionnelle et opposée au déplacement $x(t)$; le coefficient de proportionnalité k est appelé *rigidité* – ou *raideur* – du ressort;
- un *amortisseur* qui fournit une force de freinage, proportionnelle et opposée à la vitesse $\dot{x}(t)$; le coefficient de proportionnalité c est appelé *constante d'amortissement visqueux linéaire* ou, plus simplement, *résistance* du système.

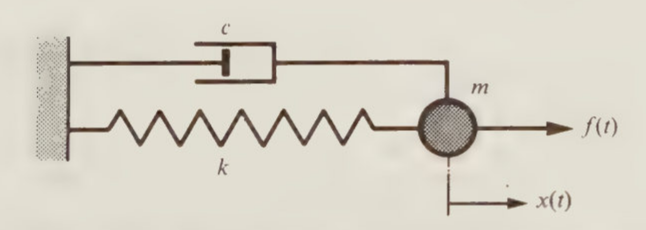


Fig. 2.1 Schéma canonique de l'oscillateur élémentaire linéaire de la mécanique.

2.2 ÉQUATION DU MOUVEMENT ET RÉGIMES VIBRATOIRES

Si une force extérieure $f(t)$ agit sur la masse, la loi de Newton s'écrit

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - c\,\dot{x} + f(t)$$

soit

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t) \tag{2.1}$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants, dont il vaut la peine d'étudier en détail les solutions, et cela pour deux raisons:

- de nombreux systèmes de la pratique peuvent être décrits par une équation de ce type;
- une bonne compréhension de l'oscillateur élémentaire facilite l'étude des systèmes plus complexes qui seront abordés par la suite.

Donnons d'abord quelques définitions relatives aux principaux types de comportement du système.

- Le *régime libre* correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre, soit pour $f(t)=0$.
- Le *régime forcé* correspond à la solution complète avec second membre. Il dépend donc essentiellement de la nature de $f(t)$: force impulsionnelle, harmonique, périodique de forme quelconque, aléatoire, etc.
- Le *régime permanent* est le régime forcé, après disparition des termes transitoires, provoqué par une force périodique. Il n'est pas influencé par les conditions initiales. Quand le système est conservatif, c'est-à-dire quand l'amortissement est nul, il n'existe pas de régime permanent à proprement parler car les conditions initiales influencent indéfiniment le comportement du système.

L'oscillateur élémentaire linéaire, représenté schématiquement par la figure 2.1, se rencontre en réalité sous des formes extrêmement variées. Nous en donnerons quelques exemples par la suite.

Très souvent, dans les problèmes de la pratique, seuls les petits mouvements d'un système peuvent être décrits par une équation différentielle linéaire. C'est une limitation considérable dont il faut parfois s'affranchir, faute de commettre des erreurs grossières enlevant toute signification aux résultats trouvés. On est ainsi conduit, toujours dans le cas de systèmes à un degré de liberté, à l'étude de l'*oscillateur élémentaire non linéaire*.

2.3 FORMES MODIFIÉES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Revenons à l'équation (2.1). Elle exprime le fait que la force extérieure $f(t)$ est égale à la somme des trois forces internes du système, à savoir la force d'inertie $m\ddot{x}$, la force de résistance visqueuse $c\dot{x}$ et la force élastique kx.

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

Divisons par la masse

$$\ddot{x} + 2\,\frac{c}{2\,m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{1}{m}\,f(t)$$

et introduisons les notations:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ *pulsation propre* du système conservatif (2.2)

$$\lambda = \frac{c}{2\,m}$$ *coefficient d'amortissement* (2.3)

$$\eta = \frac{c}{2\,m\,\omega_0} = \frac{\lambda}{\omega_0}$$ *amortissement relatif* (ou *facteur d'amortissement*) (2.4)

Dès lors, l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{1}{m}\,f(t) \tag{2.5}$$

Les quatre termes ont la dimension physique d'une accélération.

Si l'on divise maintenant (2.1) par la rigidité k, l'équation comporte des termes ayant la dimension d'un déplacement,

$$\frac{m}{k}\,\ddot{x} + \frac{c}{k}\,\dot{x} + x = \frac{1}{k}\,f(t)$$

Le second membre représente le *déplacement élastique* que provoquerait la force extérieure si le système ne comportait que la rigidité k

$$x_e(t) = \frac{1}{k}\,f(t) \tag{2.6}$$

En utilisant les définitions précédentes, l'équation devient

$$\frac{1}{\omega_0^2}\,\ddot{x} + \frac{2\,\lambda}{\omega_0^2}\,\dot{x} + x = x_e(t) \tag{2.7}$$

Cette dernière forme de l'équation du mouvement convient bien quand on recherche le régime forcé provoqué par un déplacement imposé au système.

CHAPITRE 3

RÉGIME LIBRE DE L'OSCILLATEUR ÉLÉMENTAIRE

3.1 RÉGIME LIBRE CONSERVATIF · OSCILLATEUR HARMONIQUE

Le régime libre décrit le comportement de l'oscillateur élémentaire après un *lâcher initial,* sans fourniture ultérieure d'énergie par une force extérieure, donc lorsque $f(t)=0$.

Ce lâcher est défini, au temps $t=0$, par une élongation initiale $X_0=x(0)$.

L'oscillateur est dit conservatif quand l'amortissement est nul, $c=0 \Rightarrow \lambda=0$. Ainsi (2.5) devient

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1}$$

La solution de cette équation donne le déplacement de la masse

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = A \cos \omega_0 t + B \cos (\omega_0 t - \pi/2) \tag{3.2}$$

Les deux fonctions harmoniques sont égales aux projections sur un axe de deux vecteurs, de longueurs A et B, tournant à la même vitesse angulaire ω_0 (fig. 3.1). Leur somme est donc égale à la projection du vecteur résultant de longueur X et de phase φ.

$$x = X \cos (\omega_0 t - \varphi) \tag{3.3}$$

Les nouvelles constantes d'intégration X et φ sont liées aux anciennes A et B par les relations évidentes

$$\begin{cases} X = \sqrt{A^2+B^2} \\ \mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{B}{A} \end{cases} \tag{3.4}$$

Le déplacement de la masse est ainsi un mouvement harmonique de pulsation ω_0, de fréquence f_0 et de période T_0. Le système est appelé *oscillateur harmonique*.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \tag{3.5}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{3.6}$$

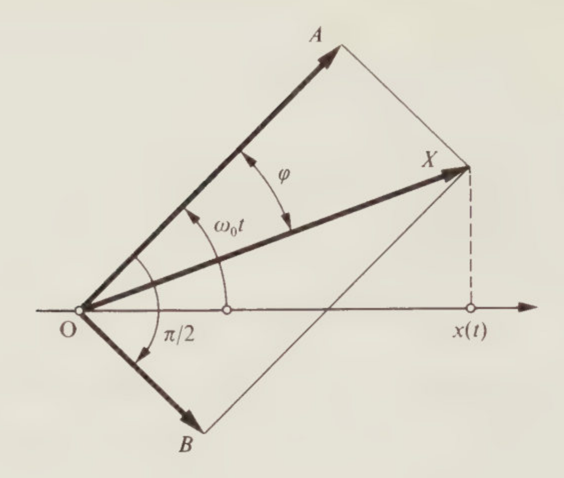


Fig. 3.1 Vecteurs tournants représentant le déplacement $x(t)$.

On obtient la vitesse par dérivation de (3.3)

$$\dot{x} = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi/2) \tag{3.7}$$

Une nouvelle dérivation donne l'accélération

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi) \tag{3.8}$$

Ces résultats signifient que la vitesse et l'accélération sont respectivement en quadrature et en opposition de phase avec les déplacements (fig. 3.2 et 3.3).

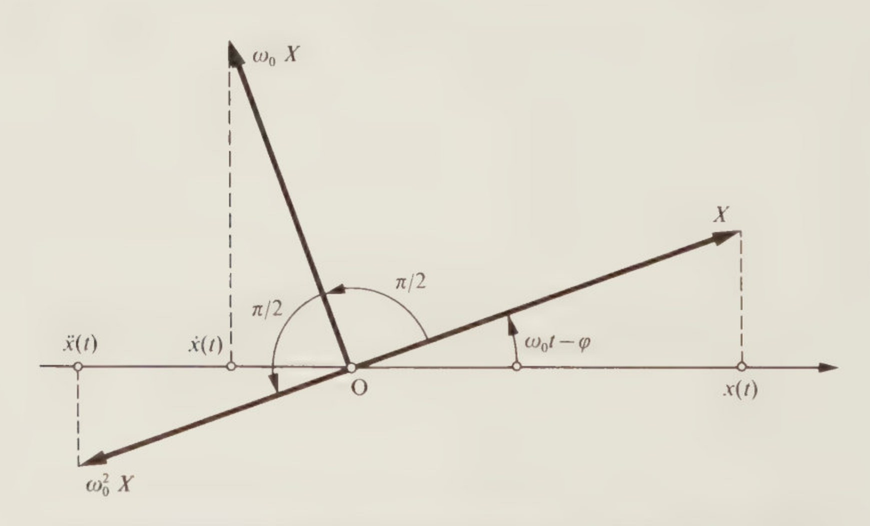


Fig. 3.2 Vecteurs tournants représentant le déplacement, la vitesse et l'accélération.

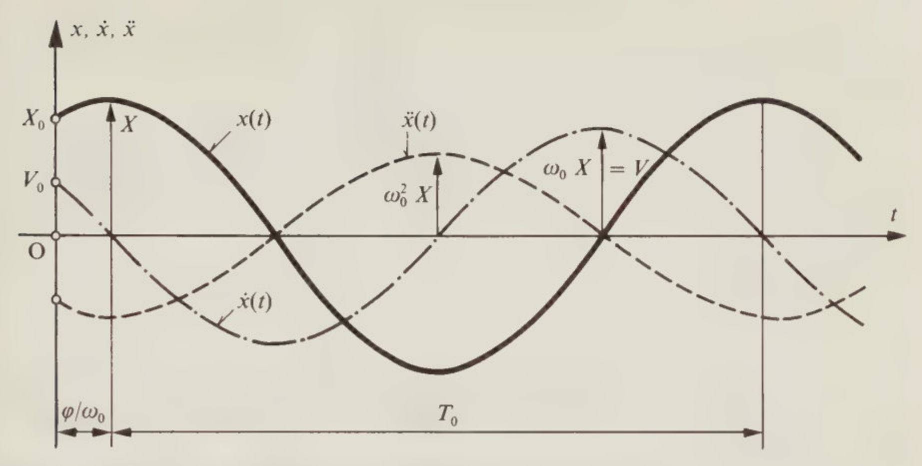


Fig. 3.3 Déplacement x, vitesse $\dot{x}$ et accélération $\ddot{x}$ en régime libre conservatif (oscillateur harmonique).

3.2 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Toujours dans le cas d'un amortissement nul, revenons à l'équation du régime libre

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k\,x = 0$$

En faisant apparaître la vitesse de la masse

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

l'accélération prend la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,v$$

L'équation devient

$$m\,v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + k\,x = 0$$

soit enfin

$$m\,v\,\mathrm{d}v + k\,x\,\mathrm{d}x = 0$$

On obtient par intégration

$$\frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2} k\,x^2 = T + V = H = \text{cte} \tag{3.9}$$

Ce résultat montre que l'énergie mécanique totale H du système, égale à la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V, est constante – se conserve – dans le régime libre de l'oscillateur non amorti.

Quand la vitesse est nulle, le déplacement a sa valeur maximum X et toute l'énergie est sous forme potentielle. Réciproquement, quand le déplacement est nul, la vitesse atteint son maximum $V = \omega_0 X$ et toute l'énergie est sous forme cinétique. On a donc

$$H = \frac{1}{2} m (\omega_0 X)^2 = \frac{1}{2} k X^2$$

La relation (3.9) peut être utilisée pour établir l'équation différentielle du mouvement d'un système conservatif. En effet, en dérivant cette relation par rapport au temps, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.10}$$

3.3 EXEMPLES D'OSCILLATEURS CONSERVATIFS

3.3.1 Introduction

L'oscillateur élémentaire, comme nous l'avons dit précédemment, se rencontre en pratique sous des formes très diverses. D'autre part, le fait d'admettre qu'un système est linéaire et ne possède qu'un seul degré de liberté résulte presque toujours d'approximations, parfois radicales, dont il faudra être conscient dans l'appréciation des résultats. Nous allons traiter quelques exemples d'application.

3.3.2 Masse à l'extrémité d'un fil

Chercher la fréquence propre du système représenté par la figure 3.4 en admettant que le fil est inextensible et que les poulies ont une masse nulle (c'est-à-dire une inertie nulle en rotation et translation).

Adoptons les notations

x_0, x_{10}, x_{20}, T_0	déplacements et tension statiques dus à la gravité,
x, x_1, x_2, T	déplacements et tension dynamiques autour des positions d'équilibre,
x', x'_1, x'_2, T'	déplacements et tension totaux.

Pour ce premier problème, procédons systématiquement en cherchant d'abord la position statique de la masse. L'équilibre statique de la masse et des poulies donne

$$mg = T_0$$
$$2\,T_0 = k_1\,x_{10}$$
$$2\,T_0 = k_2\,x_{20}$$

D'autre part, le fil étant inextensible, on peut écrire

$$x_0 = 2\,(x_{10} + x_{20})$$

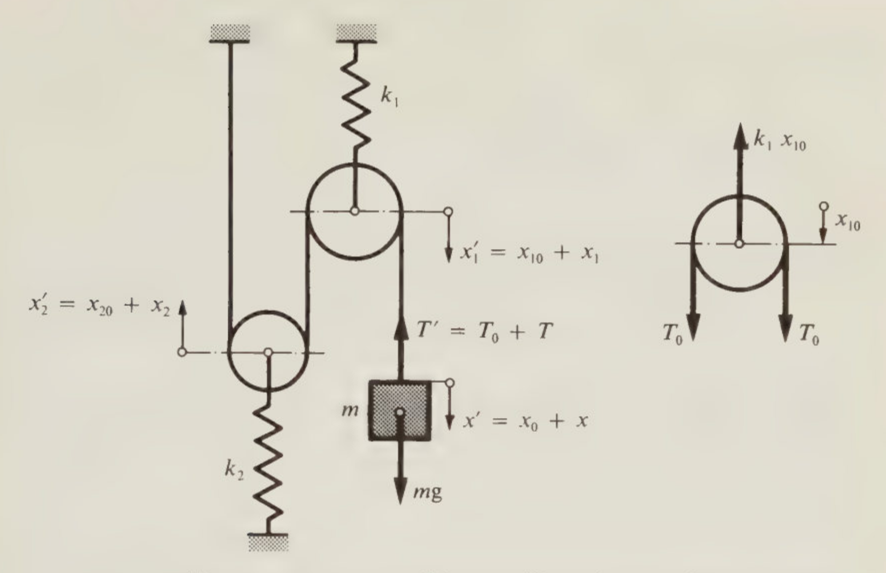


Fig. 3.4 Oscillateur comportant un fil inextensible et deux poulies sans masse.

d'où, en éliminant x_{10} et x_{20}

$$x_0 = T_0 \cdot 4\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

On introduit la rigidité équivalente k_e

$$x_0 = \frac{T_0}{k_e}$$

$$\frac{1}{k_e} = 4\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \tag{3.11}$$

En résumé

$$k_e\, x_0 - mg = 0 \tag{3.12}$$

Ecrivons maintenant la loi de Newton pour le déplacement total de la masse

$$m\, \ddot{x}' = mg - T' \tag{3.13}$$

On a d'autre part

$$2\, T' = k_1\, x_1' = k_2\, x_2' \tag{3.14}$$

$$x' = 2\,(x_1' + x_2') \tag{3.15}$$

et par conséquent

$$x' = T' \cdot 4\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{T'}{k_e} \Rightarrow T' = k_e\, x'$$

L'équation (3.13) devient

$$m\,\ddot{x}' = mg - k_e\,x'$$

puis, en remplaçant x' par $x_0 + x$

$$m\,(0+\ddot{x}) = mg - k_e\,(x_0+x)$$

ou encore

$$m\,\ddot{x} + k_e\,x = mg - k_e\,x_0$$

Le second membre étant nul d'après (3.12), on a finalement

$$m\,\ddot{x} + k_e\,x = 0 \tag{3.16}$$

Avant de poursuivre, nous allons retrouver ce résultat en annulant la dérivée de l'énergie du système, conformément à (3.10);

– ***énergie cinétique***

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}'^2$$

– ***énergie potentielle***

$$V = \frac{1}{2}\,k_1\,x_1'^2 + \frac{1}{2}\,k_2\,x_2'^2 - mg\,x'$$

Les relations (3.14) et (3.15) donnent

$$x_1' = \frac{k_2}{2\,(k_1+k_2)}\,x' \qquad\qquad x_2' = \frac{k_1}{2\,(k_1+k_2)}\,x'$$

L'énergie potentielle s'écrit ainsi, en fonction de x' seul

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{k_1\,k_2}{4\,(k_1+k_2)}\,x'^2 - mg\,x'$$

puis, en introduisant la rigidité équivalente k_e

$$V = \frac{1}{2}\,k_e\,x'^2 - mg\,x'$$

La somme des énergies cinétique et potentielle est donc

$$H = T + V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}\,k_e\,x'^2 - mg\,x' \tag{3.17}$$

La condition $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$ devient dans le cas particulier

$$\dot{x}' \, (m \, \ddot{x}' + k_e \, x' - mg) = 0 \tag{3.18}$$

La solution $\dot{x}'=0$ redonne l'équilibre statique; en effet

$$\dot{x}' = 0 \Rightarrow x' = \text{cte} = x_0 + x(t) \Rightarrow \begin{cases} x\,(t) = 0 \\ x' \quad = x_0 \end{cases}$$

En annulant la parenthèse de (3.18) et en remplaçant x' par $x_0 + x$, on retrouve bien l'équation du mouvement (3.16).

La fréquence propre des petits mouvements du système est ainsi, d'après (3.5) et (2.2)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\,\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

Application numérique

Choisissons les valeurs suivantes des constantes

$m = 50$ kg $\qquad k_1 = 3 \cdot 10^4$ N/m $\qquad k_2 = 5 \cdot 10^4$ N/m $\qquad g = 9{,}81$ m/s²

Il vient ainsi

$$(3.11) \rightarrow \quad k_e = \frac{k_1 \cdot k_2}{4\,(k_1 + k_2)} = \frac{3 \cdot 5}{4\,(3+5)}\,10^4 = 4690 \text{ N/m}$$

$$x_0 = \frac{mg}{k_e} = \frac{50 \cdot 9{,}81}{4690} = 0{,}105 \text{ m}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4690}{50}\right)^{1/2} = 1{,}54 \text{ Hz}$$

Commentaires

- Le poids mg de la masse ne joue pas de rôle sur la fréquence propre du système, ce que l'on pouvait affirmer a priori pour un problème de ce type. Il est donc possible de procéder plus rapidement en ne considérant que les déplacements dynamiques, soit

$$\left.\begin{aligned} 2\,T &= k_1\,x_1 \\ 2\,T &= k_2\,x_2 \\ x &= 2\,(x_1 + x_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = T \cdot 4\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{T}{k_e}$$

$$m\,\ddot{x} = mg - (T_0 + T) = (mg - T_0) - T \Rightarrow m\,\ddot{x} + T = 0$$

On retrouve ainsi (3.16).

- Pour que les oscillations restent dans le domaine linéaire, il faut que le fil reste tendu, ce qui limite l'amplitude du mouvement, $X < x_0 = 0{,}105$ m.
- Le système aurait trois degrés de liberté, au lieu d'un seul, en tenant compte de la masse des poulies. La fréquence fondamentale d'un tel système, c'est-à-dire sa plus basse fréquence propre, serait inférieure à 1,54 Hz.

3.3.3 Vibrations latérales d'un arbre

Un arbre en acier de section circulaire supporte un disque de diamètre relativement grand mais de faible épaisseur (fig. 3.5). En assimilant le disque à une masse ponctuelle m et en négligeant la masse de l'arbre, calculer la fréquence propre des vibrations de flexion du système.

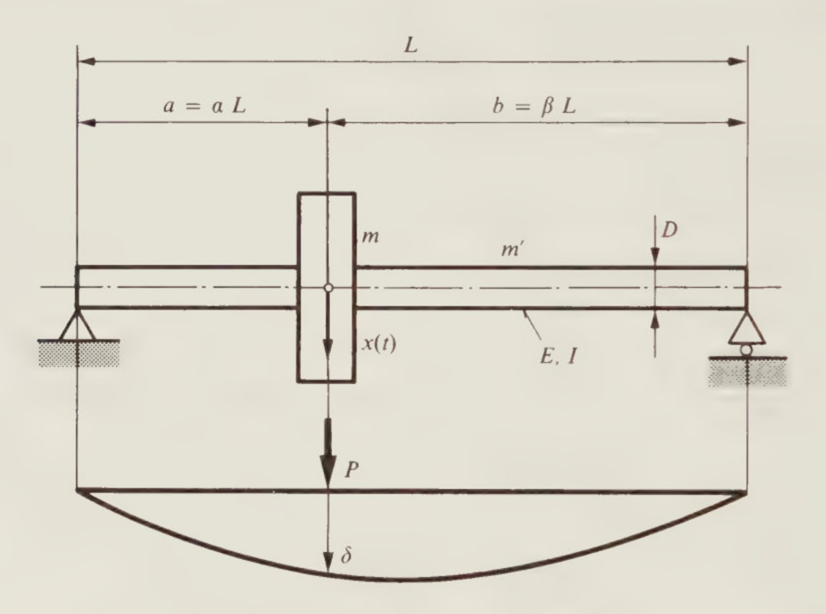


Fig. 3.5 Vibrations d'un arbre de machine.

Dans le cadre des hypothèses faites (masse ponctuelle, arbre sans masse) le système est un oscillateur élémentaire. Les petits mouvements de la masse sont régis par l'équation

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

On détermine la rigidité k en supposant qu'une force statique P est appliquée sur la masse. Cette force provoque un déplacement δ ayant pour valeur

$$\delta = P\,\frac{a^2\,b^2}{3\,L\,E\,I}$$

Dans cette expression, E et I sont respectivement le module d'élasticité et le moment d'inertie à la flexion. Par définition de la rigidité

$$P = k\,\delta \;\Rightarrow\; k = \frac{P}{\delta} = \frac{3\,L\,E\,I}{a^2\,b^2} = \frac{3\,E\,I}{\alpha^2\,\beta^2\,L^3}$$

La fréquence propre du système est ainsi

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha\,\beta\,L}\sqrt{\frac{3\,E\,I}{m\,L}}$$

Application numérique

$L = 1$ m $a = 0{,}4$ m $b = 0{,}6$ m $\Rightarrow$ $\alpha = 0{,}4$ $\beta = 0{,}6$

$D = 12$ cm $m = 300$ kg $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m² $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m³

$$I = \frac{\pi\,D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 12^4}{64} = 1018 \text{ cm}^4 = 1{,}018 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 1}\left(\frac{3 \cdot 2{,}1 \cdot 1{,}018}{3 \cdot 1}\,10^{11-5-2}\right)^{1/2} = 97 \text{ Hz}$$

Commentaires

- Les vibrations des arbres de machines seront abordées ultérieurement. Nous verrons que de tels systèmes possèdent une infinité ordonnée de fréquences propres dont la plus basse est appelée fréquence fondamentale.
- Le fait d'avoir négligé la masse m' de l'arbre revient à surestimer la fréquence propre du système. On peut obtenir une approximation par défaut en remplaçant m par $(m+m')$ dans l'expression de la fréquence propre.

$$m' = \frac{\pi\,D^2}{4}\,L\,\rho = 88{,}2 \text{ kg} \;\Rightarrow\; m + m' = 388 \text{ kg} \;\Rightarrow\; f_0' = 85 \text{ Hz}$$

La fréquence fondamentale réelle, calculée au moyen d'un programme d'éléments finis, est de 90,2 Hz. Elle est donc bien comprise entre les deux précédentes, $85 < 90{,}2 < 97$.

3.3.4 Système pendulaire

Le système pendulaire représenté par la figure 3.6 roule sans glisser sur un plan horizontal. Il est constitué d'un cylindre de masse M, de moment d'inertie J, relié rigidement par une tige à une masse m supposée ponctuelle. La masse de la tige étant négligeable, établir, par dérivation de l'énergie mécanique, l'équation différentielle des petits mouvements autour de la position d'équilibre.

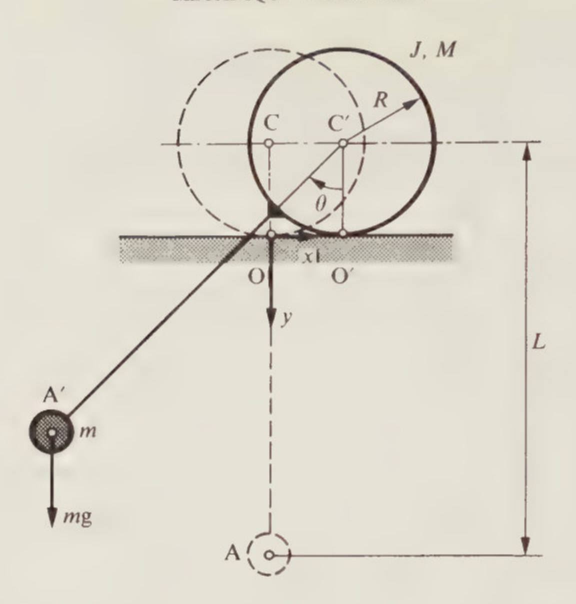


Fig. 3.6 Système pendulaire roulant sur un plan horizontal.

Dans le référentiel inertiel Oxy, le centre C′ est repéré par son rayon-vecteur $\boldsymbol{OC'}$

$$\boldsymbol{OC'} = \begin{Bmatrix} R\,\theta \\ -R \end{Bmatrix}$$

La vitesse de C′ s'obtient par dérivation, d'où

$$\boldsymbol{V}_{C'} = \begin{Bmatrix} R\,\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Faisant de même pour A′ on obtient

$$\boldsymbol{OA'} = \begin{Bmatrix} R\,\theta - L\sin\theta \\ -R + L\cos\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{V}_{A'} = \begin{Bmatrix} (R - L\cos\theta)\,\dot{\theta} \\ -L\sin\theta\cdot\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Connaissant l'expression vectorielle des vitesses, on peut calculer l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2}J\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\,|\,\boldsymbol{V}_{C'}\,|^2 + \frac{1}{2}m\,|\,\boldsymbol{V}_{A'}\,|^2$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left(J + M\,R^2 + m\,(R^2 + L^2 - 2\,R\,L\cos\theta)\right) \tag{3.19}$$

La variation de l'énergie potentielle est due au seul déplacement vertical de la masse ponctuelle m

$$V = mg\,L\,(1 - \cos\theta) \tag{3.20}$$

D'après la relation (3.10), on obtient l'équation différentielle du système en dérivant l'énergie totale:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)$$

soit, d'après (3.19) et (3.20),

$$\theta = \dot{\theta}\,\ddot{\theta}\left(J + M\,R^2 + m\,(R^2+L^2-2\,R\,L\cos\theta)\right) + m\,R\,L\,\dot{\theta}^3\sin\theta + \\ + mg\,L\,\dot{\theta}\sin\theta$$

Seule nous intéresse la solution $\dot{\theta}\neq 0$, ce qui donne, après division par $\dot{\theta}$

$$\left(J + M\,R^2 + m\,(R^2+L^2-2\,R\,L\cos\theta)\right)\ddot{\theta} + m\,(R\,L\,\dot{\theta}^2+\mathrm{g}\,L)\sin\theta = 0$$

Pour les petits mouvements, les simplifications $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$ et $\dot{\theta}^2 \ll \mathrm{g}/R$ conduisent à l'équation différentielle linéaire

$$\left(J + M\,R^2 + m\,(R-L)^2\right)\ddot{\theta} + mg\,L\,\theta = 0 \tag{3.21}$$

Il s'agit bien d'un oscillateur élémentaire conservatif. Sa fréquence propre a pour valeur

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\,L}{J + M\,R^2 + m\,(R-L)^2}} \tag{3.22}$$

On retrouve facilement l'équation (3.21) par la dérivation de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$$

3.3.5 Résonateur de Helmholtz

Calculer la fréquence propre des oscillations d'une colonne de gaz contenue dans un tube dont les extrémités débouchent respectivement dans un milieu indéfini à pression constante et dans un récipient indéformable (fig. 3.7).

p_0, ρ_0	pression et masse spécifique du gaz à l'extrémité C (milieu indéfini),
p, ρ	pression et masse spécifique du gaz à l'extrémité B (récipient),
V	volume du récipient,
L, A	longueur et section du tube.

Un tel système est un oscillateur élémentaire, appelé *résonateur de Helmholtz*, si l'on adopte les hypothèses suivantes:

– la variation de pression est beaucoup plus faible que la pression moyenne: $|p_0-p| \ll p_0$,
– *le volume du tube est beaucoup plus petit que celui du récipient* $L\,A \ll V$.

Dans ces conditions, la masse de la colonne de gaz peut être considérée comme constante

$$m = A\,L\,\rho_0$$

Ecrivons la loi de Newton pour le déplacement $x(t)$ de cette colonne

$$A\,L\,\rho_0\,\ddot{x} = -A\,(p-p_0)$$

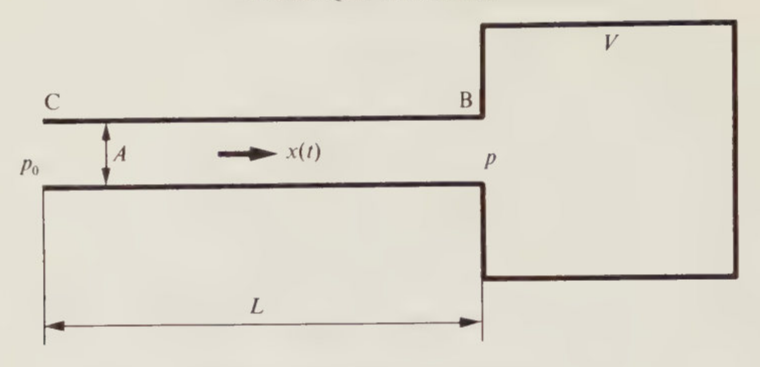


Fig. 3.7 Résonateur de Helmholtz.

$$\ddot{x} + \frac{p - p_0}{L\,\rho_0} = 0 \tag{3.23}$$

Pour établir une relation entre x et p, on suppose un comportement isentropique du gaz, soit $p \cdot \rho^{-\gamma}$=constante, γ étant l'exposant isentropique.

Il vient donc en différenciant

$$\mathrm{d}p = \frac{\gamma\,p}{\rho}\,\mathrm{d}\rho$$

Les écarts étant petits en comparaison des valeurs moyennes, on peut admettre

$$\mathrm{d}p = \frac{\gamma\,p_0}{\rho_0}\,\mathrm{d}\rho \tag{3.24}$$

Si T_0 est la température absolue et R la constante des gaz, on a

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \mathrm{R}\,T_0$$

et la relation (3.24) devient

$$\mathrm{d}p = \gamma\,\mathrm{R}\,T_0\,\mathrm{d}\rho \tag{3.25}$$

La masse élémentaire qui entre dans le récipient a pour valeur

$$\mathrm{d}m = A\,\rho_0\,\mathrm{d}x$$

Elle provoque une variation de la masse spécifique

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}m}{V} = \frac{A\,\rho_0}{V}\,\mathrm{d}x \tag{3.26}$$

Il vient, en éliminant dρ entre (3.25) et (3.26),

$$\mathrm{d}p = \frac{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \, A \, \rho_0}{V} \, \mathrm{d}x$$

puis en intégrant entre 0 et t, avec $x_0 = 0$

$$p - p_0 = \frac{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \, A \, \rho_0}{V} \, x \tag{3.27}$$

En introduisant ce résultat dans la relation (3.23), on obtient finalement

$$\ddot{x} + \frac{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \, A}{L \, V} \, x = 0 \tag{3.28}$$

On retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur élémentaire avec

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \, A}{L \, V} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \, A}{L \, V}} \tag{3.29}$$

On sait que la vitesse de propagation des ondes sonores dans un gaz a pour valeur

$$a = \sqrt{\gamma \, \mathrm{R} \, T_0} \;\Rightarrow\; a^2 = \gamma \, \mathrm{R} \, T_0 \tag{3.30}$$

ce qui permet d'écrire les relations précédentes sous la forme

$$\omega_0^2 = \frac{a^2 \, A}{L \, V} \qquad f_0 = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L \, V}} \tag{3.31}$$

Application numérique

$\mathrm{R} = 287 \ \mathrm{m^2/s^2 \, {}^\circ K} \qquad T_0 = 273 + 20 = 293 \ {}^\circ\mathrm{K}$

$\gamma = 1{,}4$ (air) $\qquad L = 10 \ \mathrm{m} \quad A = 0{,}01 \ \mathrm{m^2} \quad V = 5 \ \mathrm{m^3}$

$a = (1{,}4 \cdot 287 \cdot 293)^{1/2} = 343 \ \mathrm{m/s}$

$$f_0 = \frac{343}{2\pi} \left(\frac{0{,}01}{10 \cdot 5} \right)^{1/2} = 0{,}772 \ \mathrm{Hz}$$

3.4 RÉGIME LIBRE DISSIPATIF

L'oscillateur est qualifié de *dissipatif* quand l'amortissement n'est pas nul. Revenons à l'équation (2.5) avec $f(t) = 0$.

$$\ddot{x} + 2 \, \lambda \, \dot{x} + \omega_0^2 \, x = 0 \tag{3.32}$$

Elle a pour solution

$$x = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t} \tag{3.33}$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases} \tag{3.34}$$

En fonction de la valeur de l'amortissement relatif η, il est nécessaire pour la suite de distinguer les trois cas suivants:

$\eta > 1$ amortissement surcritique
$\eta = 1$ amortissement critique
$\eta < 1$ amortissement sous-critique

Par ailleurs, il est commode d'introduire la grandeur ω_1, toujours réelle et positive, ainsi définie

$$\omega_1^2 = |\,\lambda^2 - \omega_0^2\,| = \omega_0^2\,|\,\eta^2 - 1\,| \tag{3.35}$$

3.4.1 Amortissement surcritique

Quand l'amortissement relatif est plus grand que l'unité, on doit écrire, d'après la relation (3.35) ci-dessus

$$\eta > 1 \;\Rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \omega_0\sqrt{\eta^2 - 1} \tag{3.36}$$

Les racines (3.34) sont alors

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases} \tag{3.37}$$

Elles sont toutes deux négatives et le déplacement devient

$$x = e^{-\lambda t}\left(A\,e^{\omega_1 t} + B\,e^{-\omega_1 t}\right) \tag{3.38}$$

On obtient la vitesse par dérivation

$$\dot{x} = -e^{-\lambda t}\left((\lambda - \omega_1)\,A\,e^{\omega_1 t} + (\lambda + \omega_1)\,B\,e^{-\omega_1 t}\right) \tag{3.39}$$

Pour un *lâcher* correspondant aux conditions initiales $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$, les relations précédentes donnent,

$$\begin{cases} X_0 = A + B \\ V_0 = -(\lambda - \omega_1)\,A - (\lambda + \omega_1)\,B \end{cases}$$

On en déduit les constantes d'intégration A et B

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2\,\omega_1}\left(X_0\,(\lambda + \omega_1) + V_0\right) \\[2ex] B = \dfrac{-1}{2\,\omega_1}\left(X_0\,(\lambda - \omega_1) + V_0\right) \end{cases} \tag{3.40}$$

La figure 3.8 représente $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ dans le cas $X_0 > 0$ et $V_0 > 0$ ($\Rightarrow$ $A > 0$, $B < 0$). Ce sont des fonctions apériodiques, le système n'est plus un oscillateur.

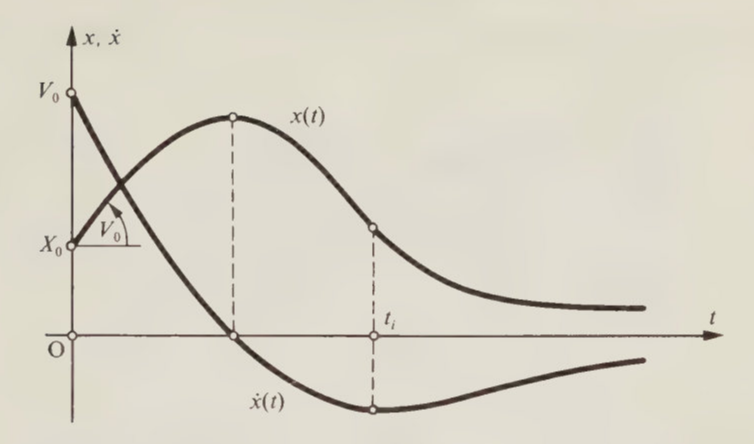


Fig. 3.8 Régime libre avec amortissement surcritique.

Compte tenu de (3.40), le déplacement x donné par la relation (3.38) peut se mettre sous la forme

$$x = e^{-\lambda t} \left(X_0 \operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t\right) \tag{3.41}$$

On vérifie facilement que $x(t)$ présente un point d'inflexion, et donc $\dot{x}(t)$ un extremum, pour

$$t_i = \frac{1}{2\,\omega_1} \ln \frac{(\lambda+\omega_1)^2 \left(X_0 (\lambda-\omega_1) + V_0\right)}{(\lambda-\omega_1)^2 \left(X_0 (\lambda+\omega_1) + V_0\right)} \tag{3.42}$$

Le point d'inflexion disparaît si

$$\frac{(\lambda+\omega_1)^2}{(\lambda-\omega_1)^2} \cdot \frac{X_0 (\lambda-\omega_1) + V_0}{X_0 (\lambda+\omega_1) + V_0} < 1$$

c'est-à-dire quand la vitesse initiale, pour $X_0 > 0$, est comprise dans l'intervalle

$$-X_0 (\lambda+\omega_1) < V_0 < -X_0 \frac{\omega_0^2}{2\,\lambda} \quad \left(= -X_0 \frac{k}{c}\right)$$

L'élongation initiale X_0 étant fixée, la figure 3.9 donne l'allure de $x(t)$ pour différentes valeurs de la vitesse initiale.

3.4.2 Amortissement critique

Quand $\eta = 1$, l'équation caractéristique de (3.32) possède une solution double

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0 \tag{3.43}$$

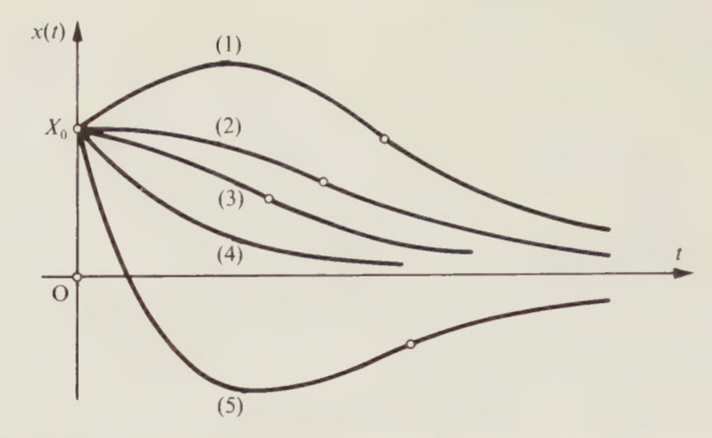


Fig. 3.9 Amortissement surcritique; comportement du système pour différentes vitesses initiales.

(1) $V_0 > 0$

(2) $V_0 = 0$

(3) $-X_0 \dfrac{\omega_0^2}{2\,\lambda} < V_0 < 0$

(4) $-X_0\,(\lambda+\omega_1) < V_0 < -X_0 \dfrac{\omega_0^2}{2\,\lambda}$

(5) $V_0 < -X_0\,(\lambda+\omega_1)$

• point d'inflexion.

La solution générale de toute équation différentielle du second ordre est donnée par la combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement indépendantes; il en est de même si $r_1 = r_2$.

Une première solution particulière est de la forme

$$x_1 = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

On peut se rendre compte, par substitution dans l'équation différentielle, qu'il existe une deuxième solution particulière de la forme

$$x_2 = u(t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

En effet,

$$\dot{x}_2 = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\big(\dot{u}(t) - \omega_0\,u(t)\big)$$

$$\ddot{x}_2 = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\big(\ddot{u}(t) - 2\,\omega_0\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t)\big)$$

Avec $\lambda = \omega_0$, la substitution dans (3.32) donne

$$\ddot{u}(t) = 0 \;\Rightarrow\; u(t) = Ct + D \;\Rightarrow\; x_2 = (Ct+D)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

d'où la solution générale pour $x(t)$

$$x = E\,x_1 + F\,x_2 = \big((E+F\,D) + F\,C\,t\big)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

et par un changement d'écriture des constantes

$$x = (A+B\,t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \qquad (3.44)$$

La vitesse est ainsi

$$\dot{x} = \big((B-\omega_0\,A) - \omega_0\,B\,t\big)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} \qquad (3.45)$$

Les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = V_0$ déterminent les constantes A et B

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = \omega_0 X_0 + V_0 \end{cases} \tag{3.46}$$

et finalement, par introduction dans les relations précédentes

$$x = \big(X_0 + (\omega_0 X_0 + V_0)\, t\big)\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t} \tag{3.47}$$

$$\dot{x} = \big(V_0 - \omega_0(\omega_0 X_0 + V_0)\, t\big)\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t} \tag{3.48}$$

Ces fonctions présentent la même allure que celles de la figure 3.8. Le point d'inflexion a pour abscisse

$$t_{\mathrm{i}} = \frac{\omega_0 X_0 + 2 V_0}{\omega_0 (\omega_0 X_0 + V_0)} \tag{3.49}$$

Ce point n'existe pas si $t_i < 0$, soit quand la vitesse initiale, pour $X_0 > 0$, est située dans l'intervalle

$$-\omega_0 X_0 < V_0 < -1/2\, \omega_0 X_0 \tag{3.50}$$

3.4.3 Amortissement sous-critique

Revenons aux racines (3.34) de l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Elles sont complexes car $\eta < 1 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$. La relation (3.35) permet alors d'écrire

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \mathrm{j}\, \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \mathrm{j}\, \omega_1 \end{cases} \qquad (\mathrm{j} = \sqrt{-1}) \tag{3.51}$$

Dans ce cas, la grandeur ω_1 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \tag{3.52}$$

et le déplacement $x(t)$ devient

$$x = \mathrm{e}^{-\lambda t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \tag{3.53}$$

On en déduit la vitesse

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \big((-\lambda A + \omega_1 B) \cos \omega_1 t - (\omega_1 A + \lambda B) \sin \omega_1 t\big) \tag{3.54}$$

Pour un lâcher avec conditions initiales quelconques $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$, on trouve les valeurs des constantes

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = \dfrac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \end{cases} \tag{3.55}$$

Le régime libre peut se mettre sous la forme

$$x = e^{-\lambda t} \left(X_0 \cos \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right) \tag{3.56}$$

qui est une expression analogue à (3.41) dans le sens que les fonctions hyperboliques sont simplement remplacées par des fonctions trigonométriques. Ces fonctions peuvent être combinées (voir fig. 3.1 page 10) et le déplacement prend la forme simple

$$x = X e^{-\lambda t} \cos (\omega_1 t - \varphi) \tag{3.57}$$

avec

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\dfrac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1}\right)^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0} \end{cases} \tag{3.58}$$

Ainsi, la grandeur X est toujours supérieure à l'élongation initiale X_0, sauf dans le cas très particulier $V_0 = -\lambda X_0$. De même, le déphasage φ est toujours différent de zéro, sauf si $V_0 = -\lambda X_0$.

Comme le montre la figure 3.10, la fonction $x(t)$ est égale à la projection sur un axe d'un vecteur tournant dont l'extrémité décrit une spirale.

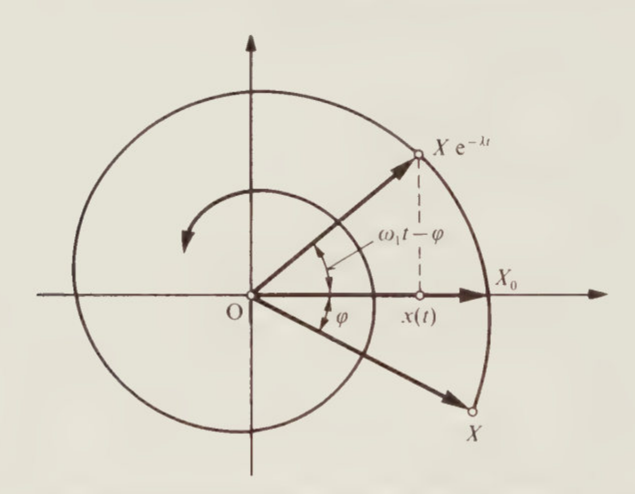


Fig. 3.10 Régime libre de l'oscillateur amorti. Lieu du vecteur tournant.

En fonction du temps, le déplacement est représenté par une sinusoïde amortie comprise entre les deux enveloppes $\pm X e^{-\lambda t}$ (fig. 3.11).

La période de $x(t)$ – ou plus précisément la pseudo-période car l'amplitude diminue – a pour valeur

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \tag{3.59}$$

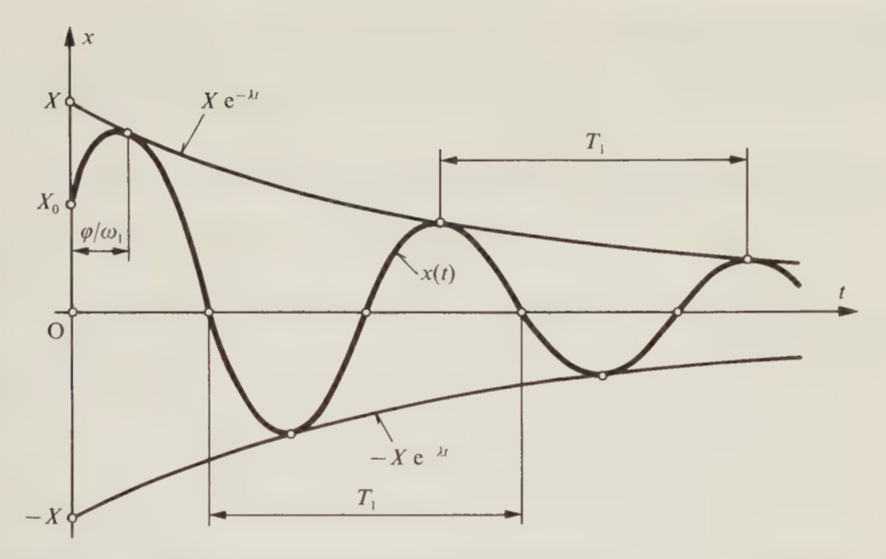


Fig. 3.11 Régime libre de l'oscillateur amorti. Déplacement en fonction du temps.

L'amortissement diminue la pulsation et augmente la période des oscillations. En effet, reprenons la relation (3.52).

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\eta^2} \qquad \omega_1 < \omega_0$$

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad T_1 > T_0 \tag{3.60}$$

Dans beaucoup de problèmes pratiques, le terme η^2 est très petit par rapport à 1 et la période T_1 peut être confondue avec T_0 sans erreur appréciable.

Il est utile, en particulier dans l'exploitation de mesures, d'utiliser la notion de *décrément logarithmique,* ainsi définie

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT_1)} \tag{3.61}$$

Il s'agit donc du logarithme, divisé par n, du rapport entre deux déplacements séparés par un nombre entier n de périodes T_1 (le plus souvent, ces déplacements sont des maxima). D'après (3.57), il vient

$$x(t+nT_1) = X\,\mathrm{e}^{-\lambda(t+nT_1)} \cos\left(\omega_1(t+nT_1) - \varphi\right) = \mathrm{e}^{-n\lambda T_1}\, x(t)$$

d'où

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \mathrm{e}^{\,n\lambda T_1} = \lambda\, T_1 \qquad \text{(indépendant de n)}$$

Comme

$$\lambda = \eta\, \omega_0 \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{2\,\eta}{\omega_0 \sqrt{1-\eta^2}}$$

le décrément logarithmique n'est fonction que de l'amortissement relatif

$$\Lambda = \frac{2\pi\,\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{3.62}$$

et réciproquement

$$\eta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2+\Lambda^2}} \tag{3.63}$$

Quand $\eta^2 \ll 1$, on a simplement

$$\eta \approx \frac{\Lambda}{2\pi} \tag{3.64}$$

Cherchons encore pour la vitesse $\dot{x}(t)$ une expression plus commode que la relation (3.54). En dérivant (3.57) il vient

$$\dot{x} = -X\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\lambda \cos(\omega_1 t-\varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t-\varphi)\right) \tag{3.65}$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\dot{x} = -X\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}\quad \mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t-\varphi+a)$$

dans laquelle

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\lambda}{\omega_1}$$

Mais $\lambda = \eta\,\omega_0$ et $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\eta^2}$, la vitesse prend ainsi la forme simple

$$\dot{x} = -\omega_0\, X\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t-\varphi+a) \tag{3.66}$$

avec

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{3.67}$$

Si l'amortissement relatif est petit, le terme η^2 peut être négligé relativement à l'unité et par conséquent

$$a \approx \mathrm{tg}\, a \approx \eta \qquad (\eta \ll 1) \tag{3.68}$$

La relation (3.66) signifie alors que la vitesse $\dot{x}$ est pratiquement en quadrature avec le déplacement x, comme c'est le cas pour un oscillateur conservatif (voir fig. 3.2, page 10).

Les zéros de $\dot{x}(t)$ correspondent aux extrema de $x(t)$ (alternativement un maximum et un minimum). Par conséquent, deux maxima - minima - successifs de $x(t)$ sont également séparés par la période T_1.

3.5 ÉNERGIE DE L'OSCILLATEUR DISSIPATIF

L'énergie totale H de l'oscillateur est la somme de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2} k\, x^2$$

et de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2$$

Ce n'est plus une constante comme pour l'oscillateur conservatif mais une fonction décroissante en raison de la puissance dissipée dans l'amortisseur. Il vient, d'après (3.57) et (3.66)

$$H = \frac{1}{2} k\, X^2\, \mathrm{e}^{-2\lambda t} \cos^2 (\omega_1 t - \varphi) + \frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, X^2\, \mathrm{e}^{-2\lambda t} \sin^2 (\omega_1 t - \varphi + a)$$

Par définition $\omega_0^2 = k/m \Rightarrow m\omega_0^2 = k$ et l'expression précédente peut s'écrire

$$H = \frac{1}{2} k\, X^2\, \mathrm{e}^{-2\lambda t} \left(\cos^2 (\omega_1 t - \varphi) + \sin^2 (\omega_1 t - \varphi + a)\right)$$

ou encore

$$H = \frac{1}{2} k\, X^2\, \mathrm{e}^{-2\lambda t} \left(1 + \sin a \cdot \sin 2 \left(\omega_1 t - \varphi + \frac{a}{2}\right)\right)$$

L'angle a est donné par (3.67)

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \Rightarrow \sin a = \eta$$

d'où finalement

$$H = \frac{1}{2} k\, X^2\, \mathrm{e}^{-2\lambda t} \left(1 + \eta \sin 2 (\omega_1 t - \beta)\right) \tag{3.69}$$

avec

$$\beta = \varphi - \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta\, \omega_0\, X_0 + V_0\, (1+\sqrt{1-\eta^2})}{\eta\, V_0 + \omega_0\, X_0\, (1+\sqrt{1-\eta^2})} \tag{3.70}$$

Ainsi, l'énergie totale oscille à la pulsation $2\omega_1$ autour d'une valeur moyenne décroissante

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k\, X^2\, e^{-2\lambda t} = \frac{1}{2} k\, (X\, e^{-\lambda t})^2 \tag{3.71}$$

égale à l'énergie potentielle correspondant à l'enveloppe du déplacement (fig. 3.12).

$$H = \bar{H}\, (1 + \eta \sin 2\, (\omega_1 t - \beta))$$

La première intersection entre $H(t)$ et $\bar{H}(t)$ se produit au temps t' tel que

$$t' = \frac{\beta}{\omega_1} \tag{3.72}$$

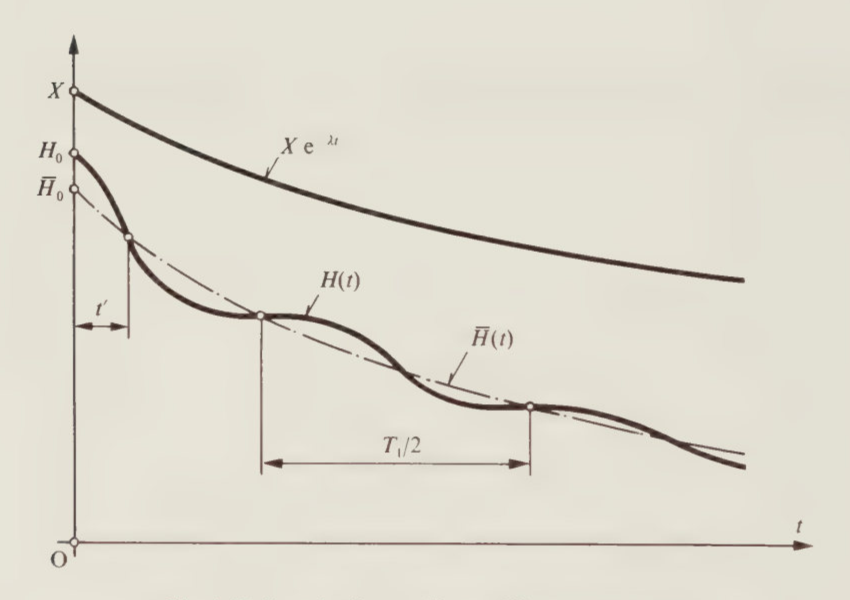


Fig. 3.12 Energie d'un oscillateur élémentaire amorti.

L'énergie perdue par l'oscillateur peut être calculée comme différence entre l'énergie initiale

$$H_0 = \frac{1}{2} k\, X^2\, (1+\eta \cos 2\, \beta) = \frac{1}{2} k\, X_0^2 + \frac{1}{2} m\, V_0^2 \tag{3.73}$$

et l'énergie H au temps t

$$\Delta H_0^t = H_0 - H(t) \tag{3.74}$$

La puissance dissipée dans l'amortisseur est égale au produit de la force dissipative par la vitesse

$$p(t) = c\,\dot{x} \cdot \dot{x} = c\,\dot{x}^2 = c\,\omega_0^2\,X^2\,\mathrm{e}^{-2\lambda t}\sin^2(\omega_1 t - \varphi + a) \tag{3.75}$$

L'intégrale de cette puissance entre 0 et t permet également de calculer l'énergie perdue

$$\Delta H_0^t = c\int_0^t \dot{x}^2\,\mathrm{d}t \tag{3.76}$$

Quand l'amortissement relatif est petit ($\eta \ll 1$), on peut confondre sans erreur appréciable les énergies H et $\bar{H}$. L'énergie perdue prend alors la forme simple

$$\Delta H_0^t = \bar{H}_0 - \bar{H}(t) = \frac{1}{2}\,k\,X^2\left(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda t}\right) \tag{3.77}$$

De même, l'énergie perdue dans un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ a pour valeur

$$\Delta H_{t_1}^{t_2} = \bar{H}(t_1) - \bar{H}(t_2) = \frac{1}{2}\,k\,X^2\left(\mathrm{e}^{-2\lambda t_1} - \mathrm{e}^{-2\lambda t_2}\right) = \bar{H}(t_1)\left(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda \Delta t}\right) \tag{3.78}$$

3.6 DIAGRAMME DU PLAN DE PHASE

Au paragraphe précédent, nous avons calculé l'énergie de l'oscillateur comme somme des énergies cinétique et potentielle. Il s'agit d'une quantité décroissante. En désignant la vitesse par v, elle a pour valeur

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2 = H \tag{3.79}$$

ou encore, après division par $k/2$

$$\frac{v^2}{\omega_0^2} + x^2 = \frac{2\,H}{k} \tag{3.80}$$

Le second membre de (3.80) a la même dimension physique que x^2, soit le carré d'une longueur

$$R^2 = \frac{2\,H}{k} \tag{3.81}$$

Quand l'amortissement est nul, cette longueur est une constante R_0. L'équation (3.80) devient alors

$$\frac{v^2}{\omega_0^2} + x^2 = R_0^2 \tag{3.82}$$

Elle représente un cercle de rayon R_0 dans le plan x, v/ω_0, appelé plan de phase (fig. 3.13). Le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre car le déplacement augmente si la vitesse est positive.

Avec un amortissement non nul, le rayon $R = R(t)$ diminue avec le temps et le cercle se transforme en une spirale qui tend vers l'origine.

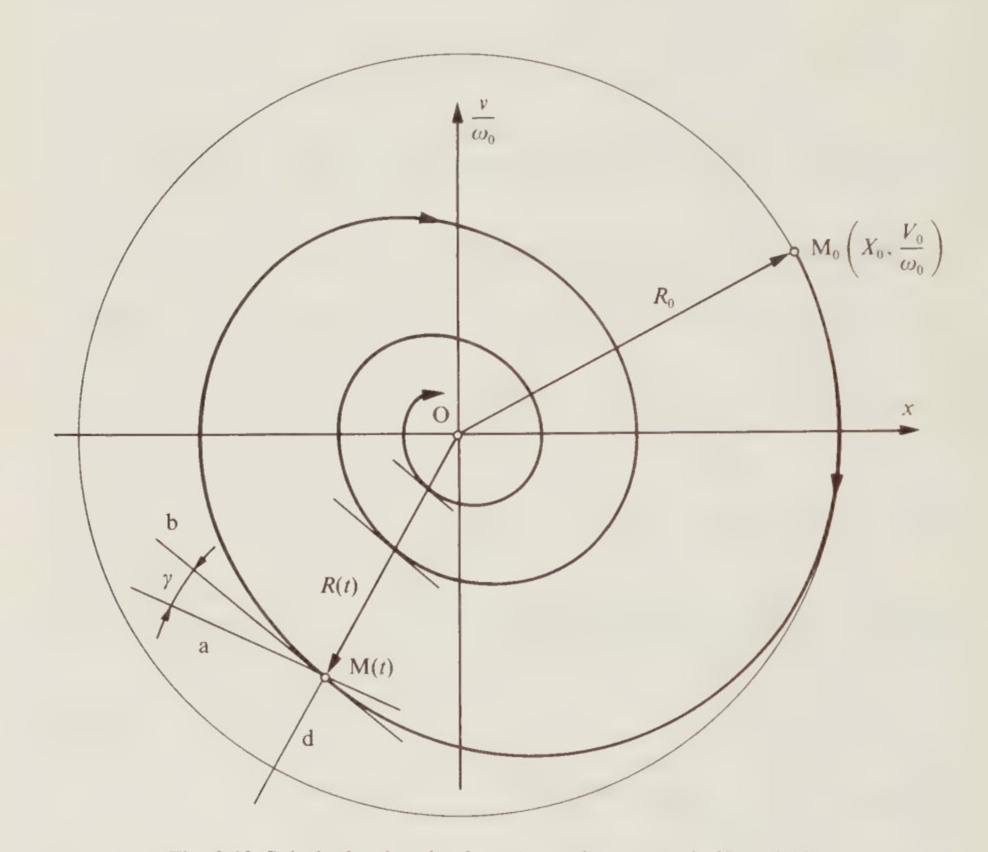


Fig. 3.13 Spirale du plan de phase (amortissement relatif $\eta = 0{,}12$).

Au point M(t) de coordonnées x, v/ω_0 sont représentées la droite polaire d, sa normale a ainsi que la tangente b à la spirale. L'angle γ entre a et b varie périodiquement mais garde toujours le même signe car $R(t)$ est toujours décroissant, sauf pour $v = 0$. En effet, quand la vitesse est nulle, la puissance dissipée est également nulle et l'énergie H est stationnaire. Ainsi, pour tous les points M(t) situées sur l'axe Ox, les tangentes à la spirale sont verticales (par contre, les tangentes à $H(t)$ sont horizontales aux points correspondants, voir fig. 3.12).

La droite polaire d est une isocline; cela signifie que les tangentes aux points d'intersection entre cette droite et la spirale sont toutes parallèles. Pour le démontrer, revenons à l'équation différentielle (3.32) en remplaçant $\dot{x}$ par v et λ par sa valeur $\eta\omega_0$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\,\eta\,\omega_0\,v + \omega_0^2\,x = 0 \tag{3.83}$$

En adoptant l'écriture

$$y = \frac{v}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\omega_0}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3.84}$$

l'équation (3.83) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(2\,\eta\,\omega_0 y + \omega_0\,x) \tag{3.85}$$

Calculons ensuite la pente de la tangente à la spirale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{v} \tag{3.86}$$

soit, compte tenu de (3.84) et (3.85)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(2\,\eta + \frac{x}{y}\right) \tag{3.87}$$

La droite d passant par l'origine, le rapport x/y est une constante que nous appelons A. Dès lors

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(2\,\eta + A) = B \tag{3.88}$$

Ainsi, la pente de la tangente est également une constante, ce qui démontre que la droite d est bien une isocline. C'est le cas en particulier pour l'axe horizontal comme nous l'avons affirmé précédemment sur la base d'un raisonnement physique.

Bien qu'analogues, les figures 3.10 et 3.13 présentent plusieurs différences. En particulier, sur la première, la projection verticale du vecteur $X\mathrm{e}^{\lambda t}$ n'est pas exactement proportionnelle à la vitesse alors que sur la seconde l'angle $\mathrm{M_0OM}(t)$ n'est pas exactement égal à $(\omega_1 t - \varphi)$.

3.7 EXEMPLES D'OSCILLATEURS DISSIPATIFS

3.7.1 Elément de suspension pour véhicule

Un élément de suspension, destiné à un véhicule routier, est soumis à des essais en laboratoire qui donnent les résultats suivants:

- le poids d'une masse de 350 kg, égale au quart environ de celle du véhicule, provoque un déplacement statique $\delta = 0{,}28$ m (fig. 3.14),

– les oscillations autour de la position d'équilibre ont une fréquence $f_1 = 0{,}835$ Hz.

A partir de ces mesures, calculer les caractéristiques de l'élément de suspension.

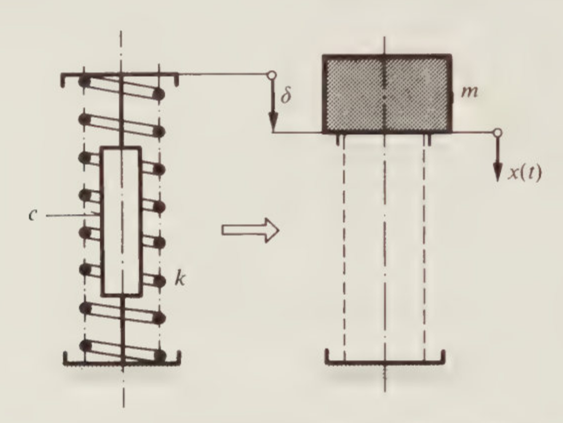


Fig. 3.14 Elément de suspension pour véhicule.

On calcule d'abord la rigidité du ressort

$$k\,\delta = mg \;\Rightarrow\; k = \frac{mg}{\delta} = \frac{350 \cdot 9{,}81}{0{,}28} = 12\,260 \text{ N/m}$$

puis la pulsation propre de l'oscillateur non amorti

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{12\,260}{350} = 35{,}04 \text{ s}^{-2} \;\Rightarrow\; \omega_0 = 5{,}919 \text{ s}^{-1}$$

La pulsation propre avec amortissement a pour valeur

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 0{,}835 = 5{,}246 \text{ s}^{-1} \;\Rightarrow\; \omega_1^2 = 27{,}52 \text{ s}^{-2}$$

On cherche l'amortissement relatif au moyen de la relation (3.52)

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\eta^2} \;\Rightarrow\; \eta = \sqrt{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}} = \left(1 - \frac{27{,}52}{35{,}04}\right)^{1/2} = 0{,}463$$

La constante d'amortissement s'en déduit par la relation (2.4)

$$\eta = \frac{c}{2\,m\,\omega_0} \;\Rightarrow\; c = 2\,\eta\,m\,\omega_0 = 2 \cdot 0{,}463 \cdot 350 \cdot 5{,}919 = 1\,920 \text{ kg/s}$$

En résumé,

$k = 12\,260$ N/m

$c = 1\,920$ kg/s

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 0{,}835 \text{ Hz} \\ \eta &= 0{,}463 \end{aligned}\right\} \text{quand la masse suspendue est égale à 350 kg}$$

3.7.2 Amortissement d'un barreau de polymère

Afin de mesurer le coefficient d'amortissement interne d'un barreau de polymère, on enregistre les oscillations en régime libre du système constitué par ce barreau et une masse m fixée à une extrémité (fig. 3.15). On constate que l'amplitude de la sixième oscillation est égale à 30 % de celle de la première. Avec les valeurs suivantes,

- longueur $L = 1{,}5$ m
- module d'élasticité $E = 2{,}2\ 10^9$ N/m^2
- section $A = 5$ cm^2 $= 0{,}5\ 10^{-3}$ m^2
- masse $m = 100$ kg

déterminer la résistance c de l'oscillateur élémentaire équivalent (on néglige la masse du barreau), puis la constante d'amortissement interne τ du polymère.

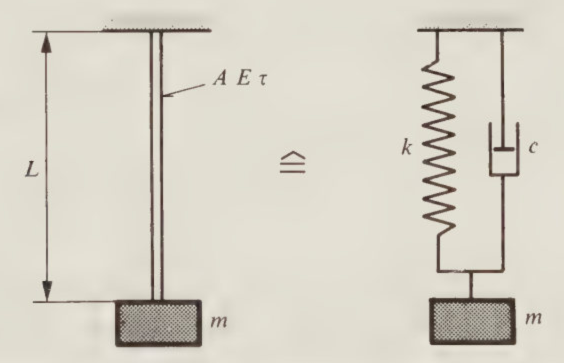


Fig. 3.15 Oscillateur constitué d'un barreau de polymère et d'une masse indéformable.

Négliger la masse du barreau relativement à m revient à considérer le système comme un oscillateur élémentaire dont la rigidité et la pulsation propre sont respectivement

$$k = \frac{E\,A}{L} = \frac{2{,}2 \cdot 10^9 \times 5 \cdot 10^{-4}}{1{,}5} = 0{,}733 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{0{,}733 \cdot 10^6}{100}\right)^{1/2} = 85{,}6 \text{ s}^{-1}$$

Entre la première et la sixième oscillation, cinq périodes T_1 se sont écoulées. Le décrément logarithmique a donc pour valeur, d'après la relation (3.61),

$$\Lambda = \frac{1}{5} \ln \frac{1{,}00}{0{,}30} = 0{,}24079$$

L'amortissement relatif s'en déduit par (3.63)

$$\eta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\,\pi^2 + \Lambda^2}} = 0{,}03830 = 3{,}83\%$$

En utilisant la relation approchée (3.64), on obtient la valeur très voisine $\eta = 0{,}03832$. La résistance de l'oscillateur équivalent peut être ensuite calculée au moyen de (2.4)

$$c = 2\,\eta\,m\,\omega_0 = 2 \times 0{,}03829 \times 100 \times 85{,}6 = 656 \text{ kg/s}$$

Pour déterminer la constante d'amortissement interne du matériau, il suffit d'écrire l'égalité des forces de frottement visqueux dans le barreau et dans l'oscillateur équivalent

$$A\,\tau\,\dot{\varepsilon} = c\,\dot{x} \tag{3.89}$$

Dans cette expression, $\dot{\varepsilon}$ est la dérivée de l'allongement relatif

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{1}{L}\dot{x} \tag{3.90}$$

Il vient donc

$$\tau = \frac{c\,L}{A} = \frac{656 \times 1{,}5}{5 \cdot 10^{-4}} = 1{,}97 \cdot 10^6 \text{ kg/ms} \tag{3.91}$$

Commentaires

- L'exemple traité s'apparente au domaine des *modèles rhéologiques*.
- En adoptant la relation approchée (3.64), c'est-à-dire $\eta = \Lambda/2\pi$, il est facile de montrer que le coefficient τ peut être calculé directement par l'expression

$$\tau = \frac{\Lambda}{\pi}\sqrt{\frac{E\,L\,m}{A}} \tag{3.92}$$

3.7.3 Oscillateur avec frottement sec

Calculer le nombre de demi-périodes effectuées par l'oscillateur de la figure 3.16, la masse étant soumise à un frottement sec de facteur μ, avec les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Un oscillateur soumis à une force de frottement sec, ou frottement de Coulomb, n'appartient pas au domaine des systèmes linéaires. Cependant, le mouvement peut être décrit par une succession d'étapes linéaires à condition d'admettre, ce que nous allons faire, que la force de frottement a une valeur absolue constante (même quand la vitesse est nulle) et qu'elle est de sens opposé à la vitesse. Dans ces conditions, la loi de Newton appliquée à la masse donne

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - (\operatorname{sgn}\dot{x})\,\mu\,mg \tag{3.93}$$

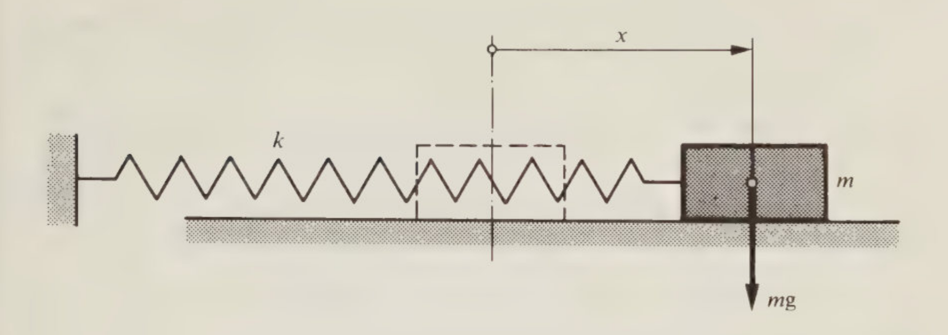


Fig. 3.16 Oscillateur avec frottement sec.

Dans cette relation (sgn $\dot{x}$) est le signe de la vitesse. L'équation différentielle du mouvement est ainsi

$$m\,\ddot{x} + k\,x = -(\operatorname{sgn}\dot{x})\,\mu\,mg \tag{3.94}$$

La solution générale est la somme de la solution sans second membre, soit la relation (3.3), et d'une solution particulière x_p que l'on peut choisir constante

$$x_p = -(\operatorname{sgn}\dot{x})\,\frac{\mu\,mg}{k} = -(\operatorname{sgn}\dot{x})\,\frac{\mu\,g}{\omega_0^2} \tag{3.95}$$

Le mouvement est donc régi par l'équation

$$x = X\cos(\omega_0 t - \varphi) - (\operatorname{sgn}\dot{x})\,X_\ell \tag{3.96}$$

où $X_\ell = \dfrac{\mu\,mg}{k}$ représente l'écart de la position de repos à partir duquel la force de rappel élastique est supérieure à la force de frottement sec limite.

La vitesse de la masse s'obtient par dérivation

$$\dot{x} = -\omega_0\,X\sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{3.97}$$

Avec les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, les constantes ont pour valeur, par (3.96) et (3.97)

$$X = X_0 + (\operatorname{sgn}\dot{x})\,X_\ell \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \tag{3.98}$$

Comme il s'agit ici d'un régime libre, il est facile de voir que, au temps initial $t = 0$, $(\operatorname{sgn}\dot{x}) = -(\operatorname{sgn} X_0)$. Le mouvement s'écrit alors

$$x = \big(X_0 + (\operatorname{sgn}\dot{x})\,X_\ell\big)\cos\omega_0 t - (\operatorname{sgn}\dot{x})\,X_\ell \tag{3.99}$$

Il est constitué de demi-périodes harmoniques, d'origine décalée de la quantité X_ℓ du côté des x positifs lorsque la vitesse est négative et inversement.

En posant $u = 2t/T_0$, l'indice de la demi-période n est la partie entière de $u + 1$, soit

$$n = [u + 1] \tag{3.100}$$

Ainsi avec X_0 positif, le mouvement peut s'écrire

$$x = \big(X_0 - (2n-1)\,X_\ell\big)\cos\pi u - (-1)^n\,X_\ell \tag{3.101}$$

Les extrema du mouvement décroissant sont alignés sur les droites d'équation

$$x = \pm (X_0 - 2\,u\,X_\ell) \tag{3.102}$$

Le mouvement de la masse s'arrête à la fin de la première demi-période où

$$|\,x\,| \leqslant |\,X_\ell\,| \tag{3.103}$$

soit, par (3.102)

$$X_0 - 2\,u\,X_\ell \leqslant X_\ell$$

ou encore

$$u \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{X_0}{X_\ell} - 1\right) \tag{3.104}$$

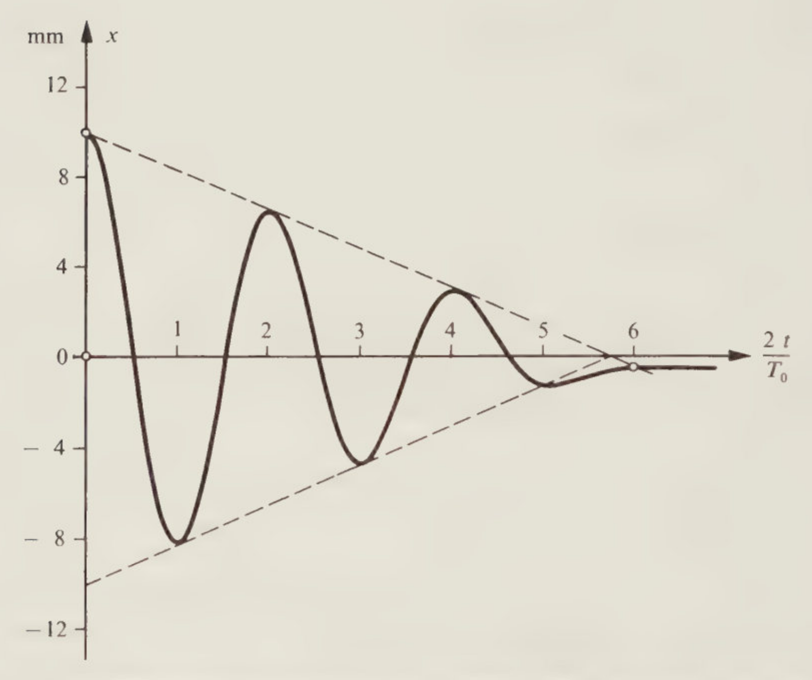


Fig. 3.17 Mouvement de l'oscillateur soumis au frottement sec, représenté à la figure 3.16.

Ainsi l'indice n_0 de la dernière demi-période effectuée s'obtient par (3.100)

$$n_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{X_0}{X_\ell} + 1\right)\right] \tag{3.105}$$

Application numérique

$m = 2$ kg $\quad k = 7\,200$ N/m $\quad \mu = 0{,}32$
$X_0 = 1$ cm $\quad g = 9{,}81$ m/s^2

L'élongation limite X_ℓ vaut alors

$$X_\ell = \mu \frac{mg}{k} = \frac{0{,}32 \times 2 \times 9{,}81}{7\,200} = 0{,}872 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Le nombre de demi-périodes effectuées est donné par (3.105)

$$n_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{10}{0{,}872} + 1\right)\right] = [6{,}234] = 6$$

La masse s'arrête donc après six demi-oscillations à la position X_6 qu'on peut calculer par (3.101)

$$X_6 = (10 - 11 \times 0{,}872) \cos 6\pi - (-1)^6 \times 0{,}872$$

$$X_6 = -0{,}464 \text{ mm} \qquad \text{et} \qquad |X_6| < X_\ell$$

CHAPITRE 4

RÉGIME PERMANENT HARMONIQUE

Rappelons que le *régime forcé* est le comportement de l'oscillateur soumis à l'action d'une force extérieure. L'étude du régime forcé, dans le cas général, fait l'objet du chapitre 6. Nous allons traiter d'abord un cas particulier très important, celui du *régime permanent harmonique*, provoqué par une force extérieure harmonique pure, après disparition des termes transitoires. Il sera ensuite possible d'aborder, par les séries de Fourier, le *régime permanent périodique* dû à une force périodique de forme quelconque (chapitre 5).

4.1 AMPLITUDE ET PHASE EN FONCTION DE LA FRÉQUENCE

Reprenons l'équation (2.1) avec $f(t) = F \cos \omega t$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \cos \omega t \tag{4.1}$$

et cherchons une solution permanente, donc sans termes transitoires, de la forme

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{4.2}$$

En introduisant x et ses dérivées dans l'équation, on obtient, par identification des termes en $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$

$$\begin{cases} A\,(k - \omega^2 m) + B\,\omega\, c = F \\ -A\,\omega\, c + B(k - \omega^2 m) = 0 \end{cases}$$

On en tire facilement les constantes A et B

$$\begin{cases} A = F \dfrac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \\[2ex] B = F \dfrac{\omega\, c}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \end{cases} \tag{4.3}$$

En combinant les deux fonctions harmoniques (voir fig. 3.1), la solution devient

$$x = X \cos (\omega t - \varphi) \tag{4.4}$$

avec $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{B}{A}$, soit

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \tag{4.5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega c}{k - \omega^2 m} \tag{4.6}$$

Il est commode, pour étudier comment X et φ varient en fonction de ω, de faire apparaître les grandeurs introduites précédemment

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ pulsation propre de l'oscillateur conservatif,

$\eta = \dfrac{c}{2\, m\, \omega_0}$ amortissement relatif,

et de définir encore les quantités

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ *pulsation relative* de la force extérieure, (4.7)

$X_s = \dfrac{F}{k}$ *déplacement statique* dû à une force constante F, (4.8)

$\mu = \dfrac{X}{X_s}$ *facteur d'amplification dynamique*. (4.9)

La relation (4.5) peut s'écrire

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-\omega^2 \dfrac{m}{k}\right)^2 + \dfrac{\omega^2 c^2}{k^2}}} = \frac{X_s}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\,\eta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En divisant par X_s, on obtient le facteur d'amplification dynamique qui a donc pour valeur, compte tenu de (4.7),

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \tag{4.10}$$

Il s'agit d'une quantité sans dimension qui est égale, comme nous le verrons à la section 4.3, au module de la *réponse complexe en fréquence*. Elle est représentée sur la figure 4.1 en fonction de la pulsation relative β, avec l'amortissement relatif η comme paramètre.

Toutes les courbes sont issues du point commun $\beta = \omega = 0$, $\mu = 1$. Cela correspond au fait qu'une force de pulsation nulle est une force statique et qu'alors, par définition, $X = X_s \Rightarrow \mu = 1$. Elles passent ensuite par un maximum (sauf si

$\eta \geqslant \sqrt{2}/2 = 0{,}707$) pour tendre vers zéro quand la pulsation tend vers l'infini; le système reste immobile si on l'excite infiniment vite.

L'oscillateur est en *résonance d'amplitude* quand X est maximum. On détermine la pulsation correspondante ω_2 en exprimant que le dénominateur de (4.10), et donc son carré, est minimum

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left((1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \beta\,(-1+\beta^2+2\,\eta^2) = 0$$

La solution $\beta = 0 \Rightarrow \omega = 0$ correspond au point commun, déjà cité, qui est un maximum de μ pour $\eta \geqslant \sqrt{2}/2$. La solution non nulle donne la pulsation cherchée

$$\beta_2 = \sqrt{1-2\,\eta^2},$$

et par conséquent

$$\omega_2 = \omega_0\,\sqrt{1-2\,\eta^2} \tag{4.11}$$

En introduisant β_2 dans la relation (4.10), on obtient le facteur d'amplification dynamique maximum

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\,\eta\,\sqrt{1-\eta^2}} \tag{4.12}$$

Si $\beta = 1$, la même relation donne

$$\mu_0 = \frac{1}{2\,\eta} \tag{4.13}$$

Quand l'amortissement est faible ($\eta \ll 1$), μ_0 et μ_{max} ont pratiquement la même valeur, comme on le voit sur la figure 4.1.

Il est utile de signaler que dans l'étude des oscillateurs électriques, en particulier dans la théorie des filtres, on utilise souvent la notion de *facteur de qualité*, ainsi définie

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{2\,c/c'}$$

c et c' étant respectivement la résistance et la résistance critique. D'après (2.4), on a

$$c = 2\,\eta\,m\,\omega_0 \quad \text{et} \quad c' = 2\,m\,\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q} = \frac{1}{2\,\eta} = \mu_0$$

Ainsi, le facteur de qualité est égal au facteur d'amplification dynamique pour $\omega = \omega_0$.

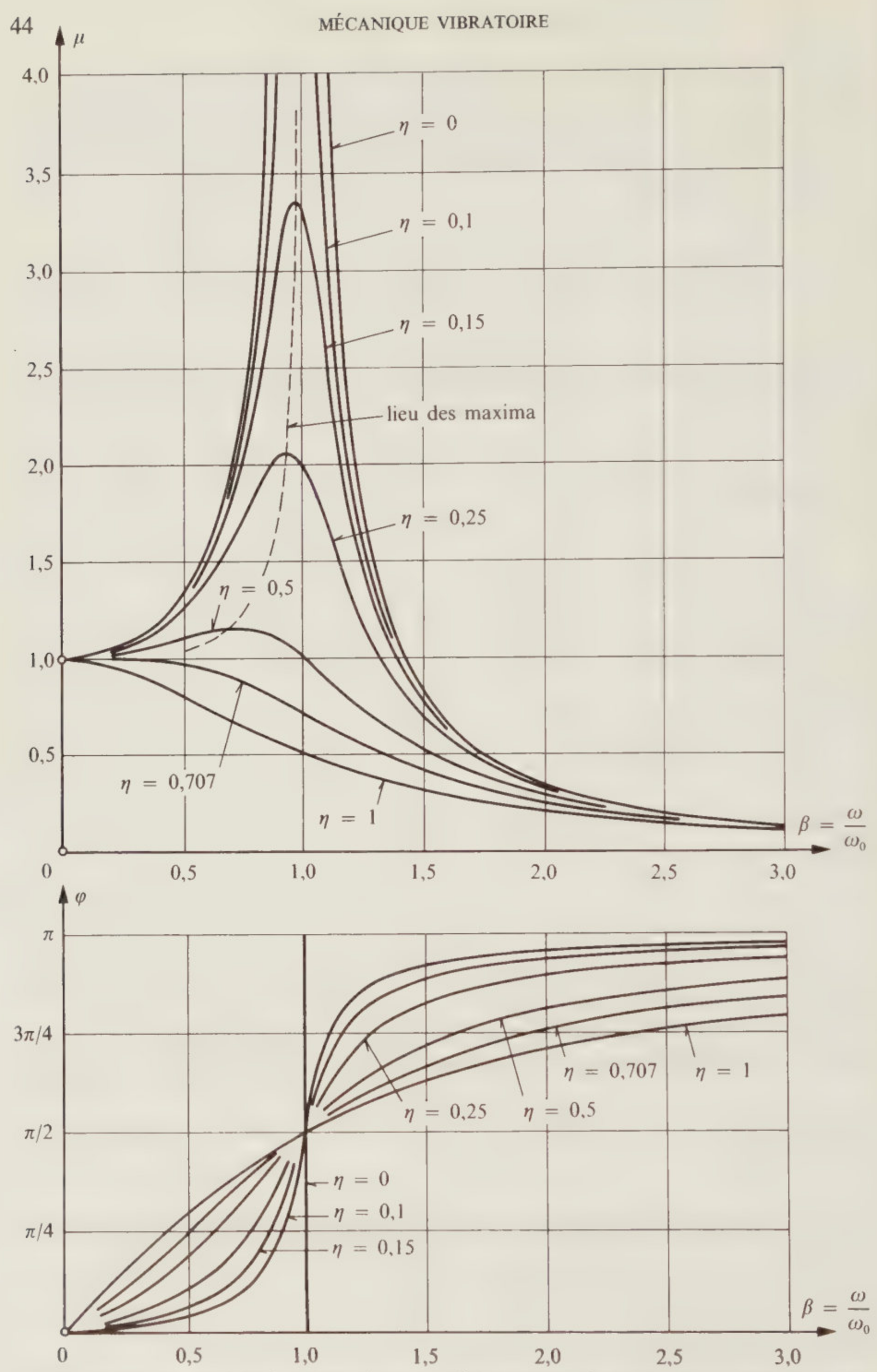


Fig. 4.1 Facteur d'amplification dynamique μ et déphasage φ en fonction de la pulsation relative β avec, comme paramètre, l'amortissement relatif η

Revenons maintenant au déphasage du déplacement sur la force extérieure (4.6)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega\, c}{k - \omega^2\, m} = \frac{\omega \dfrac{c}{k}}{1 - \omega^2 \dfrac{m}{k}} = \frac{2\, \eta \dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

En introduisant la pulsation relative $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, il vient

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\, \eta\, \beta}{1 - \beta^2} \tag{4.14}$$

Quelle que soit la valeur de l'amortissement relatif η (fig. 4.1), la force extérieure et le déplacement sont

- en phase ($\varphi = 0$) si la pulsation tend vers zéro,
- en quadrature ($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$) si $\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$,
- en opposition de phase ($\varphi = \pi$) si la pulsation tend vers l'infini.

On dit que l'oscillateur est en *résonance de phase* quand $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, donc pour $\omega = \omega_0$.

4.2 DIAGRAMME DE VECTEURS TOURNANTS

Il est intéressant de retrouver l'amplitude et la phase en régime permanent harmonique au moyen d'un diagramme de vecteurs tournants. Revenons donc à (4.1)

$$m\, \ddot{x} + c\, \dot{x} + k\, x = F \cos \omega t$$

Cette relation exprime que la somme des forces s'appliquant sur la masse est nulle. En régime permanent $x = X \cos(\omega t - \varphi)$ et ces forces ont pour valeur:

$f(t)$ force extérieure, en avance de phase φ sur le déplacement x

$$f(t) = F \cos \omega t$$

$f_m(t)$ force d'inertie, en opposition de phase avec le déplacement

$$f_m(t) = m\, \ddot{x} = -\omega^2\, m\, X \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2\, m\, X \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$f_c(t)$ force de frottement visqueux, en avance de phase de $\pi/2$ (en quadrature) sur le déplacement

$$f_c(t) = c\, \dot{x} = -\omega\, c\, X \sin(\omega t - \varphi) = \omega\, c\, X \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$f_k(t)$ force de rappel élastique, en phase avec le déplacement

$f_k(t) = k\,x = k\,X \cos(\omega t - \varphi)$

Ces forces sont égales aux projections sur un axe de vecteurs tournant à la même vitesse angulaire ω (fig. 4.2).

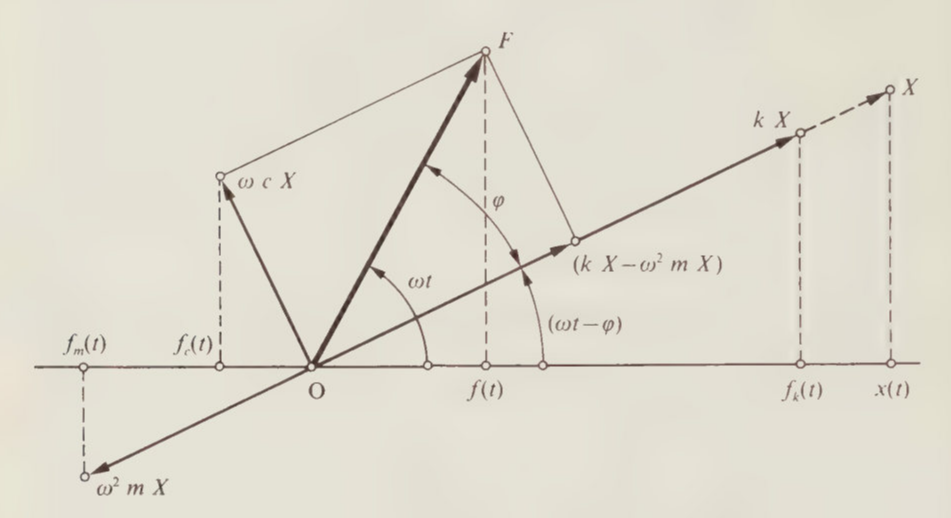


Fig. 4.2 Régime permanent harmonique; diagramme de vecteurs tournants.

Les inconnues du problème sont l'amplitude X et la phase φ que le diagramme permet de calculer aisément

$$(k\,X - \omega^2 m\,X)^2 + (\omega\,c\,X)^2 = F^2 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega\,c}{k - \omega^2 m}$$

On retrouve bien les résultats (4.5) et (4.6).

4.3 UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES · RÉPONSE EN FRÉQUENCE

Une méthode de calcul plus efficace que la précédente, bien que fondée sur la même idée de base, consiste à remplacer les vecteurs par des nombres complexes. Cette méthode, développée à l'origine essentiellement par les électriciens, sera utilisée souvent par la suite. Pour le moment, dans le but d'exposer le principe de la démarche et de définir quelques notions importantes, nous allons calculer encore une fois l'amplitude et la phase du déplacement d'un oscillateur élémentaire dissipatif soumis à une force harmonique.

Reprenons l'équation (4.1) du mouvement

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F\cos\omega t$$

et cherchons une solution permanente de la forme

$$x = X\cos(\omega t - \varphi)$$

dans laquelle X et φ sont les inconnues à calculer.

La force extérieure $f = F\cos\omega t$ peut être considérée comme la partie réelle (fig. 4.3) d'une *force complexe* ainsi définie

$$\underline{f} = F\,e^{j\omega t} = F(\cos\omega t + j\sin\omega t) \qquad (4.15)$$

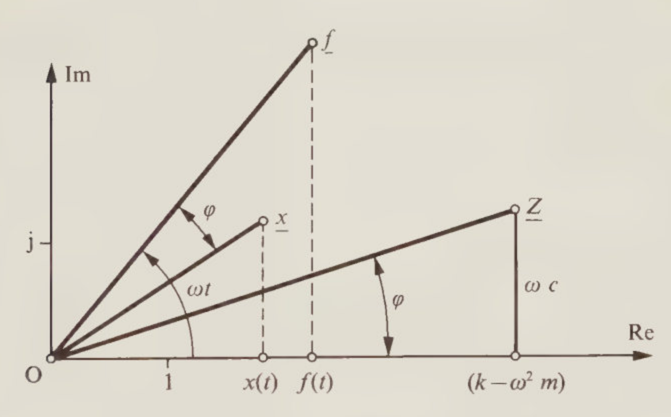


Fig. 4.3 Diagramme dans le plan complexe.

et l'on a bien

$$f = \mathrm{Re}(\underline{f})$$

Le déplacement $x(t)$ est alors la partie réelle du *déplacement complexe*

$$\begin{cases} \underline{x} = X\,e^{j(\omega t - \varphi)} \\ x = \mathrm{Re}(\underline{x}) \end{cases} \qquad (4.16)$$

L'équation (4.1) représente la partie réelle de l'équation complexe

$$m\,\underline{\ddot{x}} + c\,\underline{\dot{x}} + k\,\underline{x} = \underline{f} \qquad (4.17)$$

On calcule d'abord les dérivées de $\underline{x}$

$$\underline{\dot{x}} = j\,\omega\,X\,e^{j(\omega t - \varphi)} = j\,\omega\,\underline{x}$$

$$\underline{\ddot{x}} = -\omega^2\,X\,e^{j(\omega t - \varphi)} = -\omega^2\,\underline{x}$$

d'où par introduction dans l'équation précédente

$$\left((k - \omega^2 m) + j\,\omega\,c\right)\underline{x} = \underline{f} \qquad (4.18)$$

On appelle *impédance complexe* la quantité

$$\underline{Z} = (k - \omega^2 m) + \mathrm{j}\,\omega\, c = \sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}\;\; \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{4.19}$$

Son inverse est *l'admittance complexe*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(k-\omega^2 m) + \mathrm{j}\,\omega\, c} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \tag{4.20}$$

L'angle φ est donné par sa tangente

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega\, c}{k - \omega^2 m}$$

Il vient finalement

$$\underline{Z}\,\underline{x} = \underline{f}$$

D'où la solution

$$\underline{x} = \frac{\underline{f}}{\underline{Z}} = \underline{Y}\,\underline{f} \tag{4.21}$$

$$\underline{x} = \frac{F\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}}{(k-\omega^2 m) + \mathrm{j}\,\omega\, c} = \frac{F\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \tag{4.22}$$

En comparant (4.16) et (4.22), on retrouve les résultats précédents, à savoir

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \qquad\qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega\, c}{k - \omega^2 m}$$

La relation (4.20) montre que les dimensions physiques de la rigidité et de l'admittance complexe sont inverses l'une de l'autre ([ ] = dimension de)

$$[k] = \frac{\text{Newton}}{\text{mètre}} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \qquad [\underline{Y}] = \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

Ainsi, le produit

$$\underline{H} = k\,\underline{Y} \tag{4.23}$$

est sans dimension. Il s'agit de la *réponse complexe en fréquence*, dont le module μ a déjà été introduit au paragraphe 4.1 sous la désignation de *facteur d'amplification dynamique*. En effet, en utilisant (4.20) et les notations habituelles, on obtient

$$\underline{H}(\omega) = \frac{k}{(k-\omega^2 m) + \mathrm{j}\omega c} = \frac{1}{\left(1-\omega^2\,\dfrac{m}{k}\right) + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega\, c}{k}} = \frac{1}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + 2\,\mathrm{j}\,\eta\,\dfrac{\omega}{\omega_0}} \tag{4.24}$$

puis, en introduisant la pulsation relative

$$\underline{H}(\beta) = \frac{1}{(1-\beta^2) + 2\,\mathrm{j}\,\eta\,\beta} \tag{4.25}$$

On peut écrire également

$$\begin{cases} \underline{H} = \mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \\ \\ \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2\,\eta\,\beta}{1-\beta^2} \end{cases} \tag{4.26}$$

Il est commode de faire apparaître la réponse complexe en fréquence et le déplacement statique dans (4.21)

$$\underline{x} = (k\,\underline{Y})\,\frac{1}{k}\,\underline{f} = (k\,\underline{Y})\;\;\frac{F}{k}\;\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}$$

$$\underline{x} = \underline{H}\,X_s\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t} \tag{4.27}$$

Remarquons enfin que la quantité $X_s\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}$ représente la forme complexe $\underline{x}_e$ du *déplacement élastique* défini par la relation (2.6). Dès lors, (4.27) peut s'écrire

$$\underline{x} = \underline{H}\,\underline{x}_e \tag{4.28}$$

4.4 PUISSANCE CONSOMMÉE EN RÉGIME PERMANENT

La puissance instantanée fournie au système est égale au produit de la force extérieure par la vitesse de déplacement:

$$p(t) = f(t)\,\dot{x}(t) = -F\cos\omega t\cdot\omega\,X\sin(\omega t-\varphi)$$

soit en développant

$$p(t) = -\omega\,X\,F\cos\varphi\cos\omega t\sin\omega t + \omega\,X\,F\sin\varphi\cos^2\omega t$$

Le premier terme est la *puissance réactive* qui correspond à une énergie nulle sur une période. Le second terme est la *puissance active*, effectivement consommée par l'amortisseur et qui entraîne, sur une période, une perte d'énergie ayant pour valeur

$$H_d = \omega\,X\,F\sin\varphi\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t = \pi\,X\,F\sin\varphi$$

On peut éliminer X et φ par les relations (4.5) et (4.6)

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k-\omega^2\,m)^2 + \omega^2\,c^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega\, c}{k - \omega^2 m} \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\omega\, c}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}$$

On obtient ainsi

$$H_d = \frac{\pi\, \omega\, c\, F^2}{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \tag{4.29}$$

La *puissance moyenne consommée* – ou *puissance efficace* - s'en déduit immédiatement

$$\overline{p} = \frac{H_d}{T} = \frac{H_d\, \omega}{2\pi} = \frac{\omega^2\, c\, F^2}{2\left((k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2\right)} \tag{4.30}$$

Pour étudier comment $\overline{p}$ varie en fonction de la pulsation excitatrice et de l'amortissement, il est commode de la rapporter à la puissance $\overline{p}_0$ consommée par l'oscillateur quand $\omega = \omega_0$ et $\eta = 1$ (amortissement critique). Rappelons que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\eta = \frac{c}{2\, m\, \omega_0}$$

donc pour $\eta = 1, \quad c = 2\, m\, \omega_0$ et

$$\overline{p}_0 = \frac{F^2}{4\, m\, \omega_0} \tag{4.31}$$

On peut alors définir la puissance relative

$$\varepsilon = \frac{\overline{p}}{\overline{p}_0} = \frac{2\, m\, \omega_0\, \omega^2\, c}{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}$$

En faisant apparaître les facteurs η et β, elle devient

$$\varepsilon = \frac{4\, \eta\, \beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 4\, \eta^2\, \beta^2} \tag{4.32}$$

La puissance relative présente pour $\beta = 1$, soit $\omega = \omega_0$ (fig. 4.4), un maximum de valeur

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{\eta} \tag{4.33}$$

Ainsi la *résonance de puissance*, comme la *résonance de phase*, se produit à la pulsation ω_0, quel que soit le facteur d'amortissement.

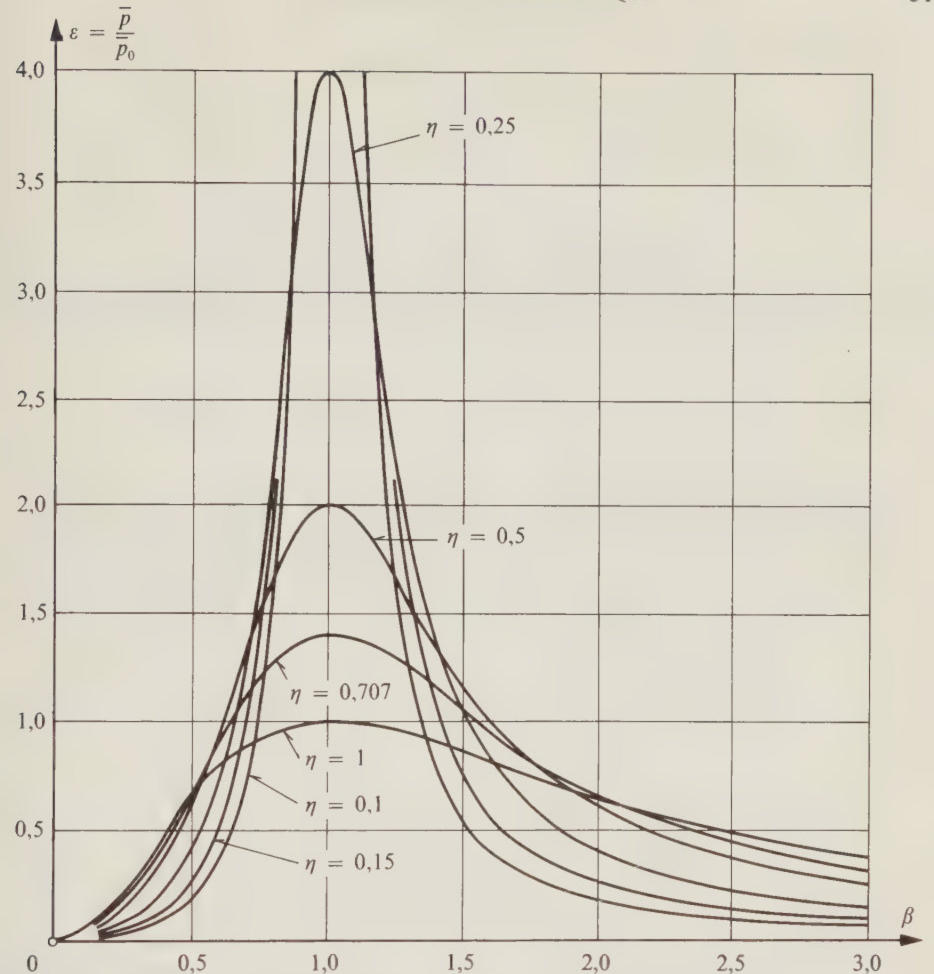


Fig. 4.4 Puissance relative ε consommée en régime permanent en fonction de la pulsation relative β et avec l'amortissement relatif η comme paramètre.

4.5 PULSATIONS PROPRES ET PULSATIONS DE RÉSONANCE

L'oscillateur élémentaire linéaire possède quatre pulsations remarquables dont trois nous sont déjà connues (ω_0, ω_1, ω_2). Avant de résumer la situation, ce qui est l'objet de ce paragraphe, il est encore nécessaire de déterminer, en régime permanent, les pulsations de *résonance de vitesse* et de *résonance d'accélération*.

On sait, d'après les résultats du paragraphe 4.1, que le déplacement permanent a pour expression

$$x = X \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{avec}$$

$$X = \mu X_s = \frac{X_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}}$$

La vitesse est ainsi

$$\dot{x} = -\omega\, X \sin(\omega t - \varphi) = -V \sin(\omega t - \varphi)$$

Ecrivons son amplitude V

$$V = \omega\, X = \omega_0\, X_s \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \tag{4.34}$$

puis cherchons la pulsation pour laquelle l'oscillateur est en *résonance de vitesse*, c'est-à-dire pour laquelle V est maximum

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow (1-\beta^2)\cdot(1+\beta^2) = 0$$

La pulsation relative β étant par nature réelle et positive, la seule racine utile de l'équation ci-dessus est $\beta = 1$. Ainsi, la résonance de vitesse se produit pour $\omega = \omega_0$.

En procédant de même pour l'accélération, il vient successivement,

$$\ddot{x} = -\omega^2\, X \cos(\omega t - \varphi) = -A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$A = \omega^2\, X = \omega_0^2\, X_s \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \beta^2(1-2\,\eta^2) - 1 = 0$$

Appelons β_3 la solution de cette équation

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{1-2\,\eta^2}}$$

La *résonance d'accélération* apparaît donc pour une pulsation ω_3 supérieure à ω_0

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\,\eta^2}} \tag{4.36}$$

En résumé, un oscillateur élémentaire linéaire possède les pulsations remarquables suivantes:

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ { pulsation propre sans amortissement
pulsation de résonance de phase,
de résonance de vitesse et de résonance de puissance

$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\eta^2}$ pulsation propre avec amortissement

$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1-2\,\eta^2}$ pulsation de résonance d'amplitude

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\,\eta^2}} \qquad \text{pulsation de résonance d'accélération}$$

Elles sont classées dans l'ordre suivant

$$\omega_2 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_3 \tag{4.37}$$

Il est ainsi utile, quand on parle de pulsation de résonance d'un oscillateur, de préciser à laquelle on fait référence. Si on ne le fait pas, c'est en principe de ω_0 qu'il s'agit.

4.6 DIAGRAMME DE NYQUIST

La courbe de la figure 4.5 représente, pour une valeur constante de l'amortissement relatif η, la réponse complexe en fréquence $\underline{H}$ en fonction de la pulsation relative β. Une telle courbe est un diagramme de Nyquist. D'après les relations (4.25) et (4.26), $\underline{H}$ a pour expression

$$\underline{H} = \frac{1}{(1-\beta^2) + 2\,\mathrm{j}\,\eta\,\beta} = \mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

avec

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\,\eta\,\beta}{1-\beta^2}$$

La courbe $\underline{H}(\beta)$ ressemble à un cercle, et ceci d'autant plus que l'amortissement relatif est petit (fig. 4.7). Elle est parcourue, par valeurs croissantes de β, du point S ($\beta=0$) au point O ($\beta=\infty$).

Désignons par a et b les parties réelle et imaginaire de $\underline{H}$

$$\underline{H} = a + \mathrm{j}\,b \tag{4.38}$$

Elles ont respectivement pour valeurs

$$\begin{cases} a = \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2} \\[2ex] b = \dfrac{-2\,\eta\,\beta}{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2} \end{cases} \tag{4.39}$$

La partie imaginaire étant toujours négative, seul le demi-plan inférieur de la figure 4.5 est accessible, à l'exception par ailleurs du demi-cercle de diamètre OS, comme nous le verrons ci-après. Les pulsations remarquables, énumérées à la fin du paragraphe précédent, correspondent aux points $\underline{H}_0$, $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$ et $\underline{H}_3$, situés dans l'ordre donné par la figure en raison des inégalités (4.37).

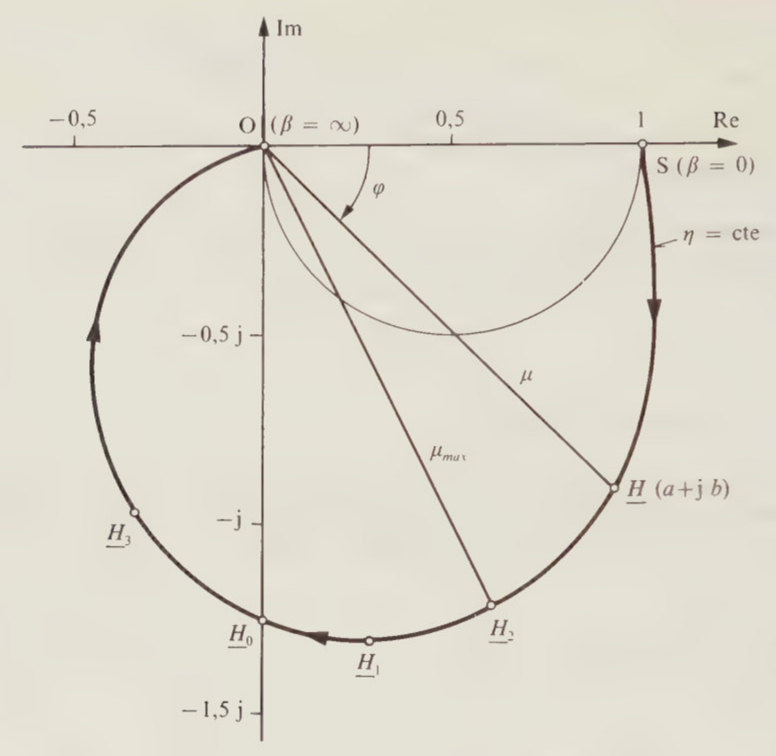


Fig. 4.5 Diagramme de Nyquist $\underline{H}(\beta)$ avec $\eta = 0{,}4$.

Pour le point $\underline{H}_0$ (résonance de phase, de vitesse et de puissance, $\beta_0 = 1$), la partie réelle est nulle alors que la partie imaginaire vaut

$$a_0 = \frac{-1}{2\,\eta} \quad (= -\mu_0) \tag{4.40}$$

Pour le point $\underline{H}_2$ (résonance d'amplitude, $\beta_2 = \sqrt{1-2\,\eta^2}$), le module est égal au maximum (4.12) et l'on obtient

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2\,(1-\eta^2)} \\[2ex] b_2 = \dfrac{-1\,\sqrt{1-2\,\eta^2}}{2\,\eta(1-\eta^2)} \end{cases} \tag{4.41}$$

Quand l'amortissement relatif tend vers zéro, a_2 tend vers 1/2. Ainsi, le lieu des points $\underline{H}_2$, représenté sur la figure 4.7, possède une asymptote verticale. Enfin, on peut vérifier que la partie imaginaire b_1 de $\underline{H}_1$ est très proche d'un maximum.

Choisissons maintenant l'amortissement relatif comme paramètre, la pulsation relative étant supposée constante. On peut vérifier que le point $\underline{H}$ décrit alors un demi-cercle du plan complexe (fig. 4.6), correspondant à l'équation

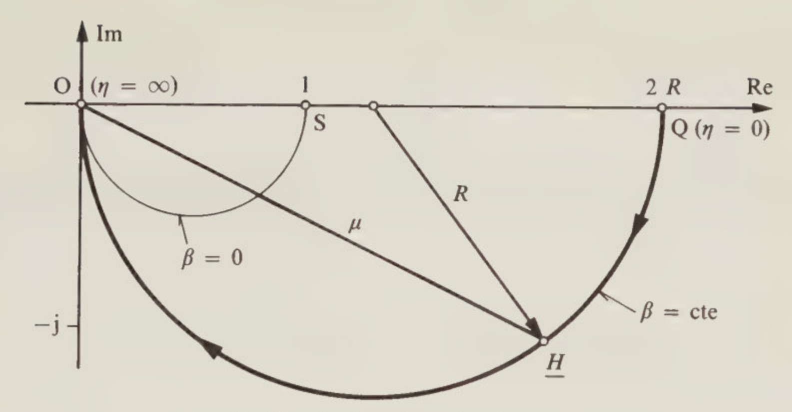


Fig. 4.6 Lieu de $\underline{H}$ en fonction de η (β=0,8).

Fig. 4.7 Courbes de la réponse complexe en fréquence $\underline{H}$ avec l'amortissement relatif η et la pulsation relative β comme paramètres. Le point $\underline{H}_2$ correspond au maximum du module de H. Les régions du plan complexe inaccessibles pour $\underline{H}$ sont assombries.

$$\begin{cases} (a-R)^2 + b^2 = R^2 \\ R = \dfrac{1}{2\,(1-\beta^2)} \end{cases} \tag{4.42}$$

Quand l'amortissement relatif augmente, le demi-cercle est parcouru du point Q ($\eta=0$) au point O ($\eta=\infty$). Pour $\beta=0$, le diamètre est égal à l'unité et l'intérieur du demi-cercle est inaccessible.

4.7 EXEMPLES DE RÉGIMES PERMANENTS HARMONIQUES

4.7.1 Vibreur pour essais de fatigue

La figure 4.8 représente schématiquement un vibreur soumettant une éprouvette E à un essai de fatigue en compression. La force d'excitation est provoquée par deux balourds tournant à la vitesse angulaire ω. La force $f'(t)$ sur l'éprouvette, d'amplitude F', est transmise par l'intermédiaire d'une plaque serrée par des boulons.

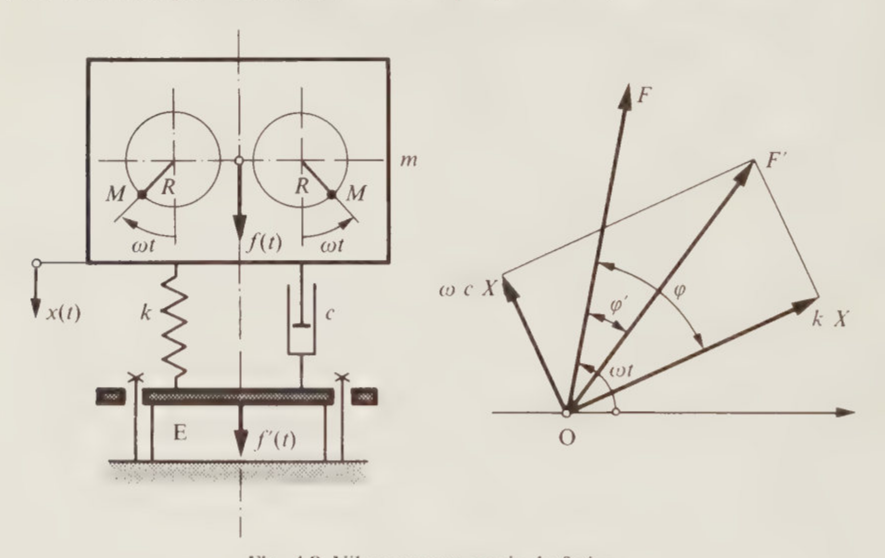


Fig. 4.8 Vibreur pour essais de fatigue.

On demande à quelle vitesse doivent tourner les balourds pour que $F'=3200$ N en admettant que l'éprouvette est indéformable en comparaison du ressort.

$R = 5$ cm	$M = 2$ kg	$m = 80$ kg (y compris les balourds)
$k = 700\,000$ N/m	$\eta = 0{,}2$	

La force d'excitation due aux balourds est

$$f(t) = 2\,R\,M\,\omega^2 \cdot \cos\omega t = F\cos\omega t \tag{4.43}$$

En régime permanent, seul envisagé ici, elle provoque un déplacement de la masse

$x = X \cos(\omega t - \varphi)$

dont l'amplitude est donnée par la relation (4.5)

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \tag{4.44}$$

La force transmise à l'éprouvette est ainsi

$$f'(t) = k\, x + c\, \dot{x} = k\, X \cos(\omega t - \varphi) - \omega\, c\, X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$= k\, X \cos(\omega t - \varphi) + \omega\, c\, X \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On peut la mettre sous la forme (fig. 4.8)

$f'(t) = F' \cos(\omega t - \varphi')$

Seule nous intéresse l'amplitude F'

$$F' = X \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2} \tag{4.45}$$

Il vient, en utilisant (4.43) et (4.44)

$$F' = 2\, R\, M\, \omega^2 \sqrt{\frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}$$

Avec les notations habituelles

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \eta = \frac{c}{2\, m\, \omega_0} \qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

la relation précédente prend la forme

$$F' = (2\, R\, M\, \omega_0^2)\, \beta^2 \sqrt{\frac{1 + 4\, \eta^2 \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\, \eta^2\, \beta^2}} = (2\, R\, M\, \omega_0^2)\, \alpha(\beta) \tag{4.46}$$

Dans le cas particulier envisagé $\eta = 0{,}2$ et la fonction sans dimension $\alpha(\beta)$ devient

$$\alpha(\beta) = \beta^2 \sqrt{\frac{1 + 0{,}16\, \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 0{,}16\, \beta^2}}$$

Elle est représentée sur la figure 4.9 (si l'on voulait étudier $\alpha(\beta)$ en prenant η comme paramètre, on obtiendrait une famille de courbes passant toutes par le point commun $\beta = \sqrt{2}$, $\alpha = 2$).

On a successivement

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{700\,000}{80} = 8\,750 \text{ s}^{-2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 93{,}5 \text{ s}^{-1}$$

$$2\ R\ M\ \omega_0^2 = 2 \times 0{,}05 \times 2 \times 8\,750 = 1\,750 \text{ N}$$

$$(4.46) \rightarrow a(\beta) = \frac{F'}{2\ R\ M\ \omega_0^2} = \frac{3\,200}{1\,750} = 1{,}829$$

La figure montre qu'il existe trois valeurs de β pour lesquelles $a = 1{,}829$. On les calcule en résolvant l'équation

$$1{,}829^2 = \beta^4 \frac{1 + 0{,}16\ \beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 0{,}16\ \beta^2}$$

et l'on trouve

$$\beta_1 = 0{,}862 \qquad \beta_2 = 1{,}567 \qquad \beta_3 = 3{,}384$$

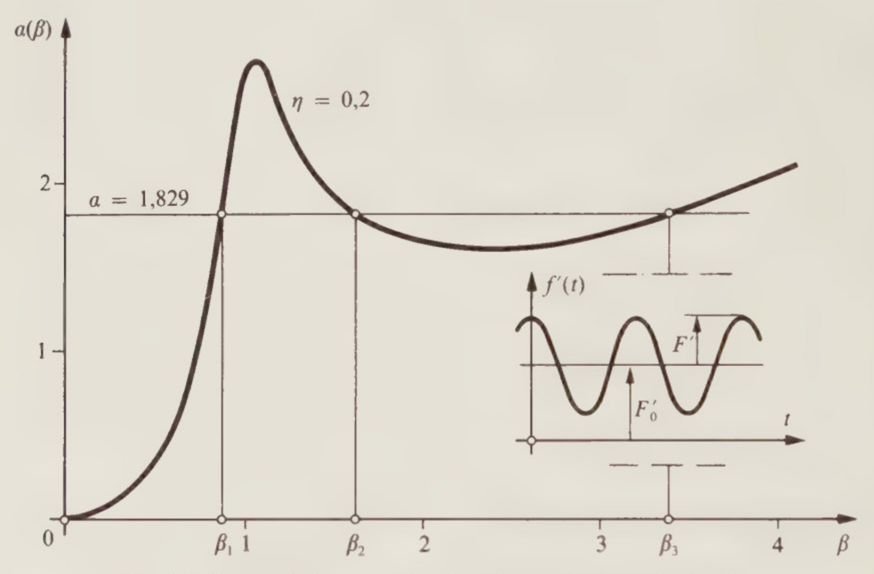


Fig. 4.9 Force relative α en fonction de la pulsation relative β.

Les vitesses de rotation correspondantes, en nombre de tours par minute, ont pour valeurs

$$n_i = \beta_i\ \frac{\omega_0}{2\pi}\ 60 = \beta_i\ \frac{93{,}5}{2\pi}\ 60$$

$$n_1 = 770 \text{ t/min} \qquad n_2 = 1\,400 \text{ t/min} \qquad n_3 = 3\,020 \text{ t/min}$$

Remarquons encore que la force B de traction des boulons, contrôlée par des rondelles élastiques, devra être suffisante pour assurer un contact permanent entre la plaque de serrage et l'éprouvette

$$F_0' = mg + B > F' = 3\,200 \text{ N}$$

Dans le cas $F'_0 = 1{,}5\ F'$, la charge sur l'éprouvette a l'allure représentée sur la figure 4.9. Une telle charge est appelée *compression alternée*.

Commentaires

- En pratique, il est en général plus facile de régler la force pulsatoire en modifiant le rayon R des balourds.
- Les machines d'essai dans lesquelles la force est produite par des vérins hydrauliques présentent naturellement des avantages considérables sur le dispositif examiné dans cet exemple. Elles sont également beaucoup plus coûteuses.

4.7.2 Mesure de l'amortissement

Détermination expérimentale de l'amortissement relatif η d'un oscillateur élémentaire au moyen d'un essai en régime permanent harmonique (fig. 4.10).

Après avoir mesuré l'amplitude $X(\omega)$ du déplacement en fonction de la pulsation d'excitation, on trace une droite horizontale à l'ordonnée $1/\sqrt{2}\ X_{max}$. Cette droite détermine les points M′ et M″ correspondant aux pulsations ω' et ω'' (largeur de bande à demi-puissance). Etablir la relation approchée

$$\eta = \frac{\omega'' - \omega'}{\omega'' + \omega'}.$$

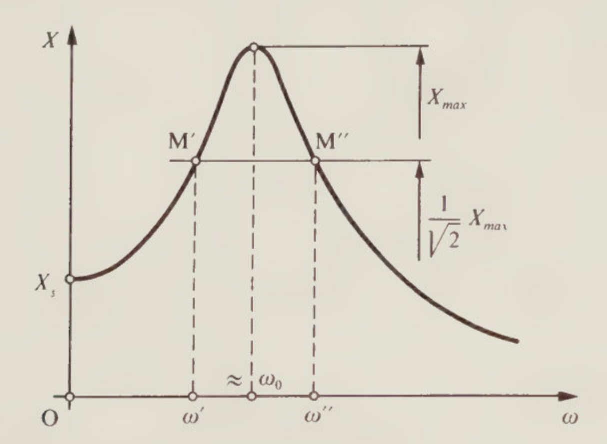


Fig. 4.10 Amplitude mesurée en fonction de la pulsation.

Revenons aux relations (4.10) et (4.12)

$$\mu = \frac{X}{X_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}} \qquad \mu_{max} = \frac{X_{max}}{X_s} = \frac{1}{2\,\eta\sqrt{1-\eta^2}}$$

Les pulsations relatives $\beta' = \dfrac{\omega'}{\omega_0}$ et $\beta'' = \dfrac{\omega''}{\omega_0}$ sont ainsi fixées par la condition

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\,\eta\,\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,\beta^2}}$$

ce qui donne

$$\beta^2 = (1-2\,\eta^2) \pm 2\,\eta\,\sqrt{1-\eta^2} \tag{4.47}$$

En supposant d'abord que l'amortissement relatif est faible ($\eta_2 \ll 1$), on peut simplifier l'équation ci-dessus

$$\beta^2 = 1 \pm 2\,\eta$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \beta'^2 &= 1 - 2\,\eta \\ \beta''^2 &= 1 + 2\,\eta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{4}\,(\beta''^2 - \beta'^2) = \frac{1}{4}\,(\beta'' + \beta')\,(\beta'' - \beta')$$

D'autre part $\eta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \dfrac{1}{2}\,(\omega'' + \omega') \quad \Rightarrow \quad \beta'' + \beta' = 2$

$$\eta = \frac{1}{2}\,(\beta'' - \beta') \tag{4.48}$$

En exprimant ce résultat en fonction des pulsations mesurées ω' et ω'', on obtient le résultat cherché

$$\eta = \frac{1}{2}\,\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0} = \frac{\omega'' - \omega'}{\omega'' + \omega'} \tag{4.49}$$

En introduisant le rapport

$$a = \frac{\omega'}{\omega''} \tag{4.50}$$

la relation précédente devient

$$\eta = \frac{1 - a}{1 + a} \tag{4.51}$$

Solution exacte

Ecrivons la relation (4.47) pour les pulsations ω' et ω''

$$\beta'^2 = \frac{\omega'^2}{\omega_0^2} = 1 - 2\,\eta^2 - 2\,\eta\,\sqrt{1-\eta^2} \tag{4.52}$$

$$\beta''^2 = \frac{\omega''^2}{\omega_0^2} = 1 - 2\,\eta^2 + 2\,\eta\,\sqrt{1-\eta^2} \tag{4.53}$$

Compte tenu de (4.50), il vient après division membre à membre et développement

$$\eta^4 - \eta^2 + \frac{(1-a^2)^2}{8\,(1+a^4)} = 0$$

Une fois connue la solution acceptable de cette équation, on détermine ω_0 par (4.52) ou (4.53).

Exemple numérique

$$\omega' = 114\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \omega'' = 126\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{114}{126} = 0{,}9048$$

Désignons par η_a et ω_{0a} les valeurs approchées

$$\eta_a = \frac{126\ -\ 114}{126\ +\ 114} = 0{,}05 = 5\%$$

$$\omega_{0a} = \frac{1}{2}\,(114+126) = 120\ \mathrm{s}^{-1}$$

Les valeurs exactes sont respectivement

$$\eta_e = 4{,}969\,\% \qquad \omega_{0e} = 120{,}45\ \mathrm{s}^{-1}$$

La méthode approchée conduit ainsi aux erreurs relatives:

– sur l'amortissement relatif

$$\varepsilon(\eta) = \frac{\eta_a - \eta_e}{\eta_e} = \frac{5\ -\ 4{,}969}{4{,}969} = +\ 0{,}62\,\%\ \text{(par excès)}$$

– sur la pulsation de résonance

$$\varepsilon(\omega_0) = \frac{\omega_{0a} - \omega_{0e}}{\omega_{0e}} = \frac{120\ -\ 120{,}45}{120{,}45} = -\ 0{,}37\,\%\ \text{(par défaut)}$$

Commentaires

- Le domaine d'utilisation de la méthode approchée est assez large. En effet

$$\varepsilon(\eta) \leqslant +5\% \Rightarrow \begin{cases} a \geqslant 0{,}75 & \left(a = \dfrac{\omega'}{\omega''}\right) \\ \eta \leqslant 0{,}14 \\ |\varepsilon(\omega_0)| \leqslant 2{,}9\% \end{cases}$$

- En pratique, la mesure de l'amortissement relatif au moyen d'un essai en régime libre (exemples 3.7.1 et 3.7.2) est le plus souvent préférable à la mesure en régime permanent décrite ci-dessus.

4.7.3 Vibrations d'un arbre de machine

Un arbre de machine supporte en son milieu un disque de masse m_1 comportant un balourd de masse m_2 (fig. 4.11). En tenant compte de la contrainte due au poids du volant, mais en négligeant la masse de l'arbre, déterminer, pour le mouvement vertical, les domaines de vitesses de rotation dans lesquels la contrainte maximale de flexion reste inférieure à une valeur σ_0 donnée. On adopte les valeurs numériques suivantes:

$m_1 = 200$ kg	$L = 0{,}8$ m	$E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa
$m_2 = 0{,}2$ kg	$R = 0{,}25$ m	$\sigma_0 = 100$ MPa
$g = 9{,}81$ m/s^2	$r = 0{,}03$ m	

Il est important de signaler que la solution de ce problème ne doit pas être considérée comme une méthode de dimensionnement à la fatigue d'un arbre de machine.

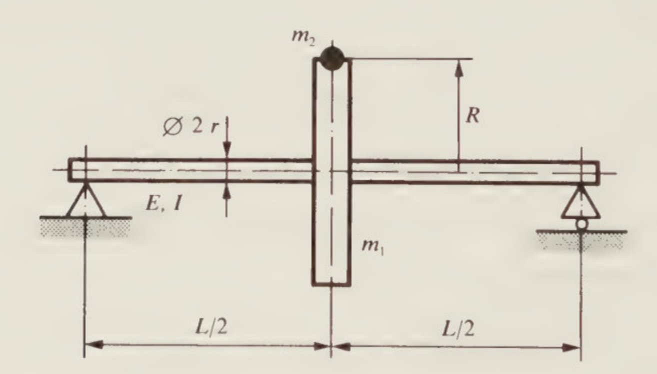


Fig. 4.11 Arbre de machine supportant un disque avec balourd.

Comme l'amortissement est supposé nul et que $m_2 \ll m_1$, l'équation différentielle du mouvement vertical $x_2(t)$ du disque peut s'écrire

$$m_1 \ddot{x}_2 + k\, x_2 = m_2 R\, \omega^2 \cos \omega t \qquad (4.54)$$

Le résultat (4.10) donne l'amplitude X_2 du déplacement permanent

$$X_2 = \frac{m_2 R}{k} \omega^2 \frac{1}{|1 - \beta^2|} \tag{4.55}$$

$\beta = \omega/\omega_0$ étant la pulsation relative.

En désignant ici par δ l'expression

$$\delta = \frac{m_2}{m_1} R$$

la relation (4.55) prend la forme

$$X_2 = \delta \frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|} \tag{4.56}$$

La résistance des matériaux permet de calculer la flèche et la contrainte de flexion maximales, au milieu de la poutre, dues au poids propre du disque

$$X_1 = \frac{m_1 \, g \, L^3}{48 \, E \, I} \qquad \sigma_1 = \frac{m_1 \, g \, r \, L}{4 \, I} \tag{4.57}$$

Dans ces expressions, E et I sont respectivement le module d'élasticité et le moment d'inertie à la flexion de l'arbre. En éliminant le poids, il vient

$$X_1 = \frac{\sigma_1 L^2}{12 \, E \, r} \tag{4.58}$$

La flèche maximum au milieu de la poutre, correspondant à la contrainte σ_0, est ainsi

$$X_0 = \frac{\sigma_0 L^2}{12 \, E \, r} \tag{4.59}$$

La somme de la flèche due au poids propre et de celle due au balourd se produit vers le bas et doit satisfaire à la condition

$$X_1 + X_2 \leqslant X_0 \tag{4.60}$$

En introduisant les résultats (4.56), (4.58) et (4.59) dans la relation (4.60), il vient

$$\delta \frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|} + \frac{\sigma_1 L^2}{12 \, E \, r} \leqslant \frac{\sigma_0 L^2}{12 \, E \, r}$$

soit

$$\frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|} \leqslant (\sigma_0 - \sigma_1) \frac{L^2}{12 \, E \, r \, \delta} \tag{4.61}$$

Les valeurs numériques permettent de calculer

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = 6{,}362 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^4 \qquad \delta = \frac{0{,}2}{200}\,0{,}25 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

puis successivement

$$\sigma_1 = \frac{200 \times 9{,}81 \times 0{,}8 \times 3 \cdot 10^{-2}}{4 \times 6{,}362 \cdot 10^{-7}} = 1{,}850 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}$$

$$X_1 = \frac{200 \times 9{,}81 \times 0{,}8^3}{48 \times 2{,}1 \cdot 10^{11} \times 6{,}362 \cdot 10^{-7}} = 1{,}567 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

Le second membre de la condition (4.61) prend la valeur

$$(10-1{,}85) \cdot 10^7 \frac{0{,}8^2}{12 \times 2{,}1 \cdot 10^{11} \times 3 \cdot 10^{-2} \times 2{,}5 \cdot 10^{-4}} = 2{,}760$$

ce qui conduit à l'équation

$$\frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|} \leqslant 2{,}76$$

dont on tire $\beta \leqslant 0{,}857$
$\beta \geqslant 1{,}252$

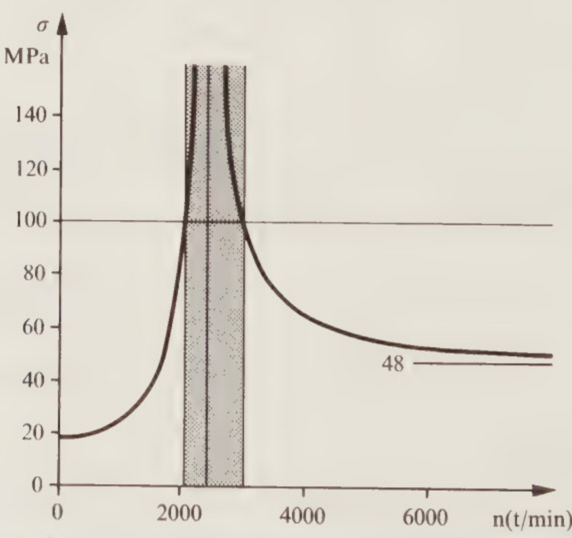


Fig. 4.12 Contrainte de flexion en fonction de la vitesse dans l'arbre représenté par la figure 4.11.

La pulsation et la fréquence propres du système sont par définition

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{X_1}} = 250{,}2 \text{ s}^{-1}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 39{,}8 \text{ Hz}$$

La vitesse de rotation équivalente a pour valeur

$\mathrm{n}_0 = 60 \cdot f_0 = 2390$ t/min

Les domaines de vitesses permis sont finalement $\mathrm{n} \leqslant 2\,048$ t/min et $\mathrm{n} \geqslant 2\,992$ t/min.

Comme le montre la figure 4.12, lorsque n devient très grand, le déplacement maximal tend vers $\delta + X_1$, valeur correspondant à une contrainte de flexion $\sigma = 48$ MPa.

CHAPITRE 5

RÉGIME PERMANENT PÉRIODIQUE

5.1 SÉRIES DE FOURIER · SPECTRES DE L'EXCITATION ET DE LA RÉPONSE

L'analyse harmonique permet de calculer le régime permanent, c'est-à-dire le régime qui se maintient après disparition des termes transitoires, d'un oscillateur dissipatif excité par une force extérieure périodique $f(t)$ quelconque. Rappelons que $f(t)$, de période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ (fig. 5.1), peut être décomposée en série de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^{\infty} (A_n \cos n\,\omega t + B_n \sin n\,\omega t) \tag{5.1}$$

Dans cette expression, l'indice n varie de un à l'infini alors que les coefficients sont donnés par les intégrales

$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\ A_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t \\ B_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{5.2}$$

Quand la fonction $f(t)$ est paire $\big(f(-t)=f(t)\big)$, les constantes B_n sont nulles et la série ne comprend que des termes en cosinus. Réciproquement, si $f(t)$ est impaire $\big(f(-t)=-f(t)\big)$, les constantes A_n sont nulles et la série ne comprend que des termes en sinus.

En groupant les cosinus et les sinus de même pulsation, $f(t)$ devient

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^{\infty} F_n \cos (n\,\omega t - \psi_n) \tag{5.3}$$

avec

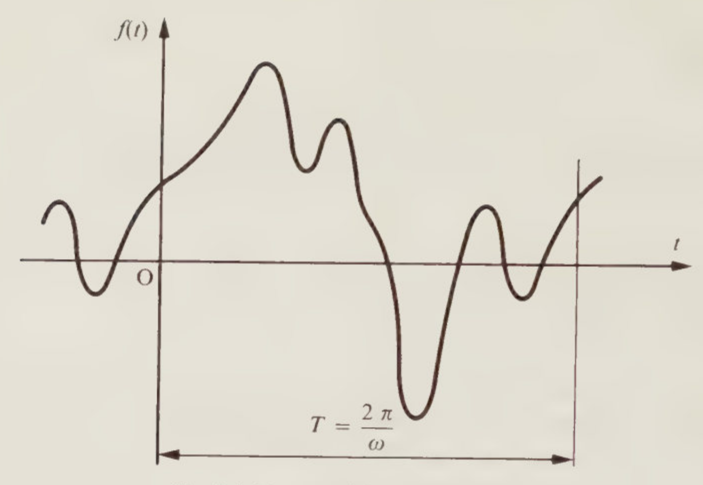


Fig. 5.1 Force extérieure périodique.

$$\begin{cases} F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \operatorname{tg} \psi_n = \dfrac{B_n}{A_n} \end{cases} \tag{5.4}$$

Le terme $F_1 \cos (\omega t - \psi_1)$ est la *fondamentale* de la force extérieure; les termes d'ordre supérieur $(n > 1)$ sont appelés *harmoniques*.

Revenons maintenant à l'équation de l'oscillateur

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, ce qui permet de superposer les solutions particulières correspondant à chaque terme de (5.3). On aura donc

$$x(t) = \frac{1/2 \; F_0}{k} + \sum_n^{\infty} X_n \cos (n \omega t - \psi_n - \varphi_n) \tag{5.5}$$

Ce résultat montre que $x(t)$ est une fonction périodique, de même période que $f(t)$, et justifie ainsi l'expression de *régime permanent périodique*.

L'amplitude X_n de l'harmonique de rang n peut être calculée au moyen de la relation (4.5)

$$X_n = \frac{F_n}{\sqrt{(k - n^2 \omega^2 m)^2 + n^2 \omega^2 c^2}} = \mu_n X_{sn} \tag{5.6}$$

Par analogie avec (4.8) et (4.10), le déplacement statique et le facteur d'amplification dynamique correspondants ont pour valeurs

$$X_{sn} = \frac{F_n}{k} \tag{5.7}$$

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2\beta^2)^2 + 4\,\eta^2 n^2 \beta^2}} \tag{5.8}$$

Quant au déphasage, il est donné par (4.6) ou (4.14)

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{n\,\omega\,c}{k - n^2\omega^2 m} = \frac{2\,\eta\,n\,\beta}{1 - n^2\beta^2} \tag{5.9}$$

La figure 5.2 montre comment la série des amplitudes F_n (spectre de $f(t)$) se transforme en une série des amplitudes X_n (spectre de $x(t)$) au moyen des deux exemples suivants:

(1) La pulsation de résonance d'amplitude ω_2 est inférieure à la pulsation fondamentale de $f(t)$. Une série décroissante F_n se transforme alors en une série X_n plus fortement décroissante.

(2) La pulsation ω_2 est voisine, par exemple, de 3ω. L'amplitude X_3 du troisième harmonique de $x(t)$ peut devenir supérieure à X_1, même si $F_3 < F_1$.

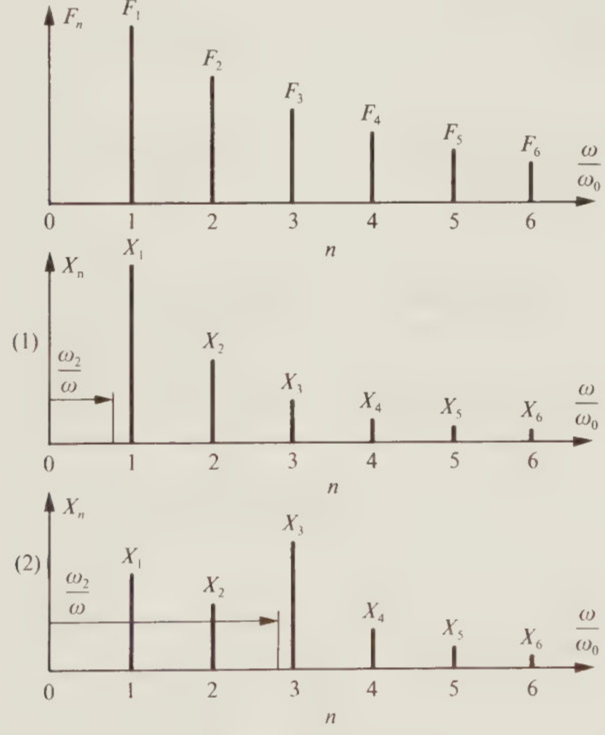


Fig. 5.2 Spectres de $f(t)$ et de $x(t)$
(1) $\omega_2/\omega < 1$ (2) $\omega_2/\omega \approx 3$.

L'amplitude des harmoniques de $x(t)$ décroît plus rapidement que celle des harmoniques de $f(t)$, dès que leur pulsation $n\omega$ est supérieure à une fois et demie environ la pulsation ω_2 (voir fig. 4.1). L'oscillateur se comporte comme un filtre des

hautes fréquences. Cet effet apparaît clairement en écrivant les relations (5.8) et (5.9) comme suit

$$\mu_n = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n^2} - \beta^2\right)^2 + \frac{4\,\eta^2\,\beta^2}{n^2}}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{1}{n} \frac{2\,\eta\,\beta}{\frac{1}{n^2} - \beta^2}$$

Pour les grandes valeurs de n, elles deviennent

$$\mu_n \approx \frac{1}{n^2\,\beta^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n \approx -\frac{2\,\eta}{n\,\beta}$$

Ainsi, l'amplitude X_n décroît comme $\frac{1}{n^2}$ et le déphasage φ_n tend vers π.

5.2 SÉRIES DE FOURIER SOUS FORME COMPLEXE

En utilisant les relations d'Euler liant les fonctions trigonométriques aux fonctions exponentielles complexes

$$\cos n\,\omega t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2} \qquad \sin n\,\omega t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2\,\mathrm{j}}$$

la décomposition en série de Fourier prend la forme

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \frac{1}{2} \sum_n^{\infty} \left(A_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}) - \mathrm{j}\,B_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t})\right)$$

ou, en groupant les termes différemment,

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \frac{1}{2} \sum_n^{\infty} \left((A_n - \mathrm{j}\,B_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + (A_n + \mathrm{j}\,B_n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right)$$

Introduisons les notations

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{1}{2} F_0 \\ \underline{C}_n = \dfrac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}\, B_n) \\ \underline{C}_n^* = \underline{C}_{-n} = \dfrac{1}{2}(A_n + \mathrm{j}\, B_n) \end{cases} \tag{5.10}$$

La série devient ainsi

$$f(t) = C_0 + \sum_{n}^{\infty} (\underline{C}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \underline{C}_n^*\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}) \tag{5.11}$$

ou encore, en sommant de $-\infty$ à $+\infty$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{C}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{5.12}$$

Les coefficients complexes $\underline{C}_n$ peuvent être calculés à partir de (5.2)

$$\underline{C}_n = \frac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}\, B_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,(\cos n\,\omega t - \mathrm{j}\sin n\,\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.13}$$

Les relations précédentes représentent la forme complexe – ou exponentielle – des séries de Fourier.

On peut s'affranchir des termes négatifs de la sommation (5.12) en considérant $f(t)$ comme la partie réelle d'une force complexe $\underline{f}(t)$ ainsi définie

$$f(t) = \mathrm{Re}\,\underline{f}(t) = \mathrm{Re}\left(D_0 + \sum_{n}^{\infty} \underline{D}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\right) \tag{5.14}$$

Pour trouver la valeur des coefficients complexes $\underline{D}_n$, il suffit d'égaler la relation précédente avec (5.11) que l'on peut écrire comme suit

$$f(t) = C_0 + \sum_{n}^{\infty} \left((\mathrm{Re}\,\underline{C}_n + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,\underline{C}_n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + (\mathrm{Re}\,\underline{C}_n - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,\underline{C}_n)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right)$$

$$f(t) = C_0 + 2\sum_{n}^{\infty} (\mathrm{Re}\,\underline{C}_n \cos n\,\omega t - \mathrm{Im}\,\underline{C}_n \sin n\,\omega t) \tag{5.15}$$

De même, (5.14) peut se mettre sous la forme

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(D_0 + \sum_{n}^{\infty} (\underline{D}_n \cos n\,\omega t + \mathrm{j}\,\underline{D}_n \sin n\,\omega t)\right)$$

$$f(t) = D_0 + \sum_{n}^{\infty} (\mathrm{Re}\,\underline{D}_n \cos n\,\omega t - \mathrm{Im}\,\underline{D}_n \sin n\,\omega t) \tag{5.16}$$

L'égalité de (5.15) et (5.16) donne, compte tenu de (5.13)

$$D_0 = C_0$$
$$\underline{D}_n = 2\,\underline{C}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{5.17}$$

Dans la relation (5.14), le terme $\underline{D}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$ représente l'harmonique de rang n de la force excitatrice. Il est comparable à la force complexe $F\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ introduite à la section 4.3, à la différence près que $\underline{D}_n$ est une *amplitude complexe* comportant un déphasage ψ_n.

$$\underline{D}_n = D_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \Rightarrow \underline{D}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} = D_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t-\psi_n)}$$

La comparaison avec (5.3) et (5.4) montre que

$$D_n = F_n = \sqrt{A_n^2+B_n^2} \qquad \mathrm{tg}\,\psi_n = \frac{B_n}{A_n}$$

Nous avons vu à la section 4.3 que la réponse de l'oscillateur à une excitation $f(t) = \mathrm{Re}\,(F\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$ est égale à la partie réelle du *déplacement complexe* (ou *réponse complexe*)

$$x(t) = \mathrm{Re}\,\underline{x}(t) \tag{5.18}$$

Ce déplacement complexe a pour valeur

$$\underline{x}(t) = \underline{Y}\,F\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{H}\,X_s\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Rappelons que dans ces expressions, $\underline{Y}$, $\underline{H}$ et X_s sont respectivement l'admittance complexe, la réponse complexe en fréquence et le déplacement statique.

Si la force excitatrice comporte des harmoniques, la linéarité du système permet de superposer les déplacements dus à ces harmoniques. D'autre part, la relation (5.18) reste valable. Il vient donc

$$\underline{x}(t) = \frac{D_0}{k} + \sum_n^{\infty} \underline{x}_n(t) = \frac{D_0}{k} + \sum_n^{\infty} \underline{Y}_n\,\underline{D}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$$
$$= \frac{D_0}{k} + \sum_n^{\infty} \underline{H}_n\,\frac{1}{k}\,\underline{D}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{5.19}$$

On définit *le déplacement statique* X_{sn} et le *déplacement statique complexe* $\underline{X}_{sn}$ provoqués par l'harmonique de rang n de la force. Le déphasage de cette harmonique étant ψ_n, on a

$$\underline{X}_{sn} = \frac{1}{k}\,\underline{D}_n = \frac{1}{k}\,D_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} = X_{sn}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_n} \tag{5.20}$$

Le déphasage du déplacement, l'admittance complexe et la réponse complexe en fréquence pour l'harmonique de rang n se déduisent des relations (4.14), (4.20) et 4.25) en remplaçant ω par $n\omega$ et β par $n\beta$ ($\beta=\frac{\omega}{\omega_0}$).

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{2\,\eta\, n\, \beta}{1 - n^2\, \beta^2} \tag{5.21}$$

$$\underline{Y}_n = \frac{1}{(k - n^2\,\omega^2\, m) + \mathrm{j}\, n\, \omega\, c} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n}}{\sqrt{(k-n^2\,\omega^2\,m)^2 + n^2\,\omega^2\,c^2}} \tag{5.22}$$

$$\underline{H}_n = \frac{1}{(1-n^2\,\beta^2) + 2\,\mathrm{j}\,\eta\, n\, \beta} \tag{5.23}$$

Montrons enfin la concordance entre les relations (5.5) et (5.6) d'une part et (5.19) d'autre part. Le produit $\underline{Y}_n\ \underline{D}_n$ peut s'écrire

$$\underline{Y}_n \cdot \underline{D}_n = \frac{D_n}{\sqrt{(k-n^2\,\omega^2\,m)^2 + n^2\,\omega^2\,c^2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\varphi_n+\psi_n)}$$

Comme $D_n = F_n$, on retrouve l'amplitude X_n de l'harmonique de rang n du déplacement

$$X_n = \frac{F_n}{\sqrt{(k-n^2\,\omega^2\,m)^2 + n^2\,\omega^2\,c^2}}$$

La relation (5.5) devient ainsi avec $D_0 = 1/2\ F_0$

$$\underline{x}(t) = \frac{1/2\ F_0}{k} + \sum_n^{\infty} X_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t - \psi_n - \varphi_n)} \tag{5.24}$$

La partie réelle de (5.24) est bien identique à (5.5).

5.3 EXEMPLES DE RÉGIMES PERMANENTS PÉRIODIQUES

5.3.1 Battements en régime permanent

Etudier le déplacement $x(t)$ provoqué par deux forces harmoniques d'amplitudes et pulsations voisines.

Les deux forces

$$f'(t) = F'\cos\omega' t \qquad \text{et} \qquad f''(t) = F''\cos\omega'' t$$

provoquent des déplacements permanents $x'(t)$ et $x''(t)$ dont les amplitudes et les phases peuvent être calculées au moyen des relations (4.5) et (4.6). Le déplacement total est donc

$$x = X' \cos(\omega' t - \varphi') + X'' \cos(\omega'' t - \varphi'') \tag{5.25}$$

Il est commode d'exprimer les amplitudes X' et X'' en fonction de leur somme et de leur différence

$$x = \frac{1}{2}(X'+X'')\left(\cos(\omega' t-\varphi') + \cos(\omega'' t-\varphi'')\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(X'-X'')\left(\cos(\omega' t-\varphi') - \cos(\omega'' t-\varphi'')\right)$$

Transformons les sommes de cosinus en produits

$$x = (X'+X'')\cos\left(\frac{\omega'+\omega''}{2}t - \frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega'-\omega''}{2}t - \frac{\varphi'-\varphi''}{2}\right)$$

$$- (X'-X'')\sin\left(\frac{\omega'+\omega''}{2}t - \frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega'-\omega''}{2}t - \frac{\varphi'-\varphi''}{2}\right) \tag{5.26}$$

Pour simplifier l'écriture, on adopte les notations

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}(\omega'+\omega'') & \varphi &= \frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'') \\ a &= \frac{1}{2}(\omega'-\omega'') & \psi &= \frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'') \end{aligned} \tag{5.27}$$

Compte tenu de (5.27), la relation (5.26) devient

$$\begin{aligned} x &= (X'+X'')\cos(\omega t-\varphi)\cdot\cos(at-\psi) \\ &\quad - (X'-X'')\sin(\omega t-\varphi)\cdot\sin(at-\psi) \end{aligned} \tag{5.28}$$

Le déplacement x oscille avec une pulsation ω à l'intérieur d'une enveloppe qui oscille elle-même, à la pulsation plus faible a, entre les amplitudes extrêmes $X'+X''$ et $X'-X''$. Ce comportement, appelé *battement en régime permanent*, est représenté sur la figure 5.3 pour les deux cas suivants:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Cas } (a) \quad X' = 0{,}7 \qquad X'' = 0{,}3 \\ &\text{Cas } (b) \quad X' = X'' = 0{,}5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X' + X'' = 1{,}0$$

$$\text{Cas } (a) \text{ et } (b) \qquad \begin{aligned} \omega &= 50\ \mathrm{s}^{-1} & a &= 3{,}5\ \mathrm{s}^{-1} \\ \varphi &= 0{,}4 & \psi &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Quand les amplitudes X' et X'' sont égales, le déplacement prend la forme simple

$$x = 2\,X'\cos(\omega t-\varphi)\cdot\cos(at-\psi)$$

Il s'annule pour chaque demi-période $\tau/2 = \pi/a$, avec une vitesse qui est elle-même nulle. L'oscillateur ne possède alors plus d'énergie.

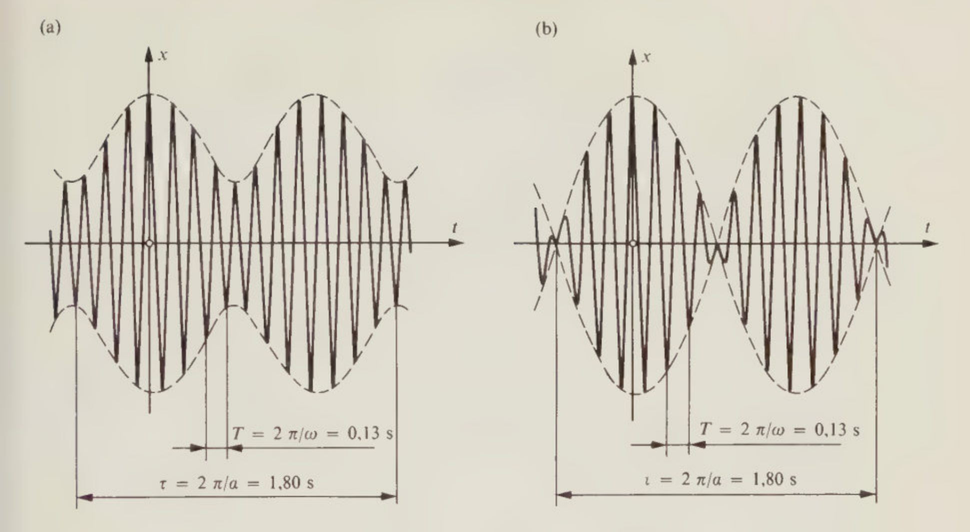


Fig. 5.3 Battements en régime permanent
(a) $X' = 0{,}7 \qquad X'' = 0{,}3$
(b) $X' = X'' = 0{,}5$.

5.3.2 Réponse à une excitation rectangulaire périodique

La force extérieure $f(t)$ représentée par la figure 5.4 agit sur un oscillateur élémentaire en régime permanent. Chercher le spectre de $f(t)$, puis celui de $x(t)$ dans les deux cas suivants

(*a*) $\omega_0 = 0{,}8\ \omega \qquad \eta = 0{,}05$

(*b*) $\omega_0 = 5{,}3\ \omega \qquad \eta = 0{,}05$

Dans le cas particulier envisagé, la fonction $f(t)$ est paire et sa valeur moyenne est nulle. En se référant aux relations (5.2), on a donc

$$F_0 = 0 \quad B_n = 0 \;\Rightarrow\; A_n = F_n \quad \text{et} \quad \psi_n = 0$$

On trouve ensuite facilement

$$A_n = F \frac{4}{n\,\pi} \sin \frac{n\,\pi}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A_n = \pm\, F \dfrac{4}{n\,\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ A_n = 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \tag{5.29}$$

La force excitatrice peut s'écrire

$$f(t) = \sum_n^{\infty} F_n \cos n\,\omega t \tag{5.30}$$

avec

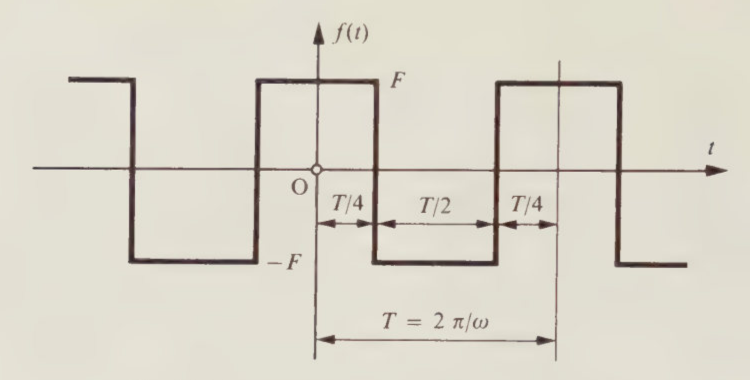


Fig. 5.4 Force extérieure rectangulaire périodique.

$$F_n = F \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \tag{5.31}$$

L'amplitude des harmoniques de $f(t)$ est inversement proportionnelle à leur ordre. Le rapport F_n/F est donné dans le tableau de la figure 5.5.

La réponse du système s'obtient par superposition de solutions harmoniques, soit par (5.5),

$$x(t) = \sum_n^{\infty} X_n \cos(n\,\omega t - \varphi_n) \tag{5.32}$$

avec, d'après (5.6), (5.7) et (5.8),

$$X_n = X_{sn}\,\mu_n = \frac{F_n}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-n^2\beta^2)^2 + 4\,\eta^2 n^2 \beta^2}} \tag{5.33}$$

En désignant par $\delta = F/k$ le déplacement statique que provoquerait une force constante de valeur F, l'amplitude relative du mouvement lié à l'harmonique n devient

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-n^2\beta^2)^2 + 4\,\eta^2 n^2 \beta^2}} \tag{5.34}$$

On peut ainsi établir le tableau de la figure 5.5.

Cas (a)

$$\omega_0 = 0{,}8\,\omega \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{\omega_0} = 1{,}25 \qquad \eta = 0{,}05$$

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n\pi}\left((1-1{,}5625\,n^2)^2 + 1{,}563 \cdot 10^{-2}\,n^2\right)^{-1/2}$$

Cas (b)

$$\omega_0 = 5{,}3 \Rightarrow \beta = 0{,}1887 \qquad \eta = 0{,}05$$

$$\frac{X_n}{\delta} = \frac{4}{n\,\pi}\left((1-3{,}56\cdot 10^{-2}\,n^2)^2 + 3{,}56\cdot 10^{-4}\,n^2\right)^{-1/2}$$

n	1	3	5	7	9	11	13
F_n/F	1,2732	0,4244	0,2546	0,1819	0,1415	0,1157	0,0979
(a) X_n/δ	2,2096	0,0325	0,0067	0,0024	0,0011	0,0006	0,0004
(b) X_n/δ	1,3200	0,6224	1,7572	0,2406	0,0748	0,0349	0,0195

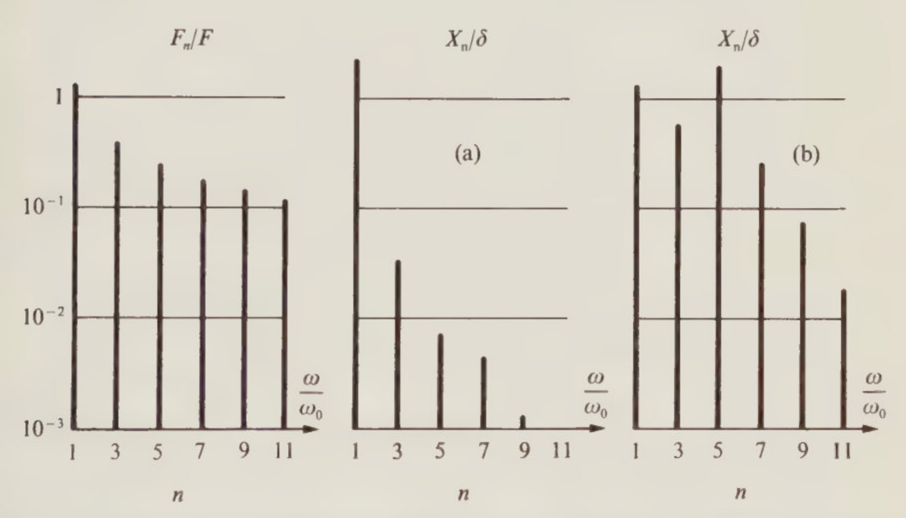


Fig. 5.5 Tableau récapitulatif et représentation des spectres de $f(t)$ et de $x(t)$ pour l'exemple 5.3.2.

Commentaires

- Il est impossible d'obtenir en pratique une force identique à celle que nous avons choisie dans cet exemple. On peut cependant s'en approcher sensiblement au moyen de machines appelées hydropulses, utilisées pour des essais de fatigue.
- L'oscillateur se comporte comme un filtre passe-bas très efficace dans le cas (a). En effet, $x(t)$ est une fonction sinusoïdale presque parfaite puisque l'amplitude de l'harmonique la plus importante – la 3e – ne représente que 0,0325/2,2096 = 1,5 % de l'amplitude de la fondamentale.
- Dans le cas (b), par contre, l'harmonique 5 est proche de la résonance d'amplitude $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1-2\,\eta^2} = 5{,}3\,\omega\sqrt{1-2\times 0{,}05^2} = 5{,}29\,\omega$. Son amplitude est ainsi

plus grande que celle de la fondamentale. Compte tenu encore des harmoniques 3 et 7, $x(t)$ présente une allure fort différente d'une sinusoïde pure.

5.3.3 Réponse temporelle à une excitation périodique

Calculer la réponse d'un oscillateur élémentaire en régime permanent soumis à la force extérieure de la figure 5.6, définie sur une période $T = 2\pi/\omega$ par

$$f(t) = F\,(e^{-2t/T} - 1) \qquad -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}$$

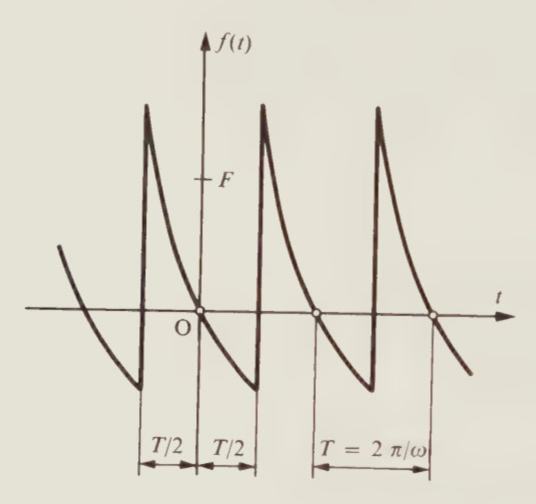


Fig. 5.6 Représentation de la force excitatrice $f(t)$.

Les coefficients de la série de Fourier complexe de $f(t)$ s'obtiennent par (5.13) appliquée à la période définie ci-dessus

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \tag{5.35}$$

puis, en remplaçant $f(t)$ par sa valeur

$$\underline{C}_n = F\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{-\frac{\omega t}{\pi}} - 1)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

$$= F\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{-(1+jn\pi)\frac{\omega t}{\pi}} - e^{-jn\omega t})\, d(\omega t)$$

Après intégration, on obtient

$$\underline{C}_n = F\left(\frac{\text{sh } 1 \cos n\pi}{1 + j\,n\pi} - \frac{\sin n\pi}{n\pi}\right) \tag{5.36}$$

Ainsi $f(t)$ prend la forme simple (5.12)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{C}_n \, e^{jn\omega t} \tag{5.37}$$

Dans cet exemple, il est avantageux d'exprimer $f(t)$ sous la forme (5.14)

$$f(t) = \text{Re}\, \underline{f}(t) = \text{Re}\left(D_0 + \sum_{n}^{\infty} \underline{D}_n \, e^{jn\omega t}\right)$$

Les coefficients $\underline{D}_n$ se déduisent directement des $\underline{C}_n$ par (5.17). Il vient ici

$$D_0 = C_0 = F\,(\text{sh } 1 - 1)$$

$$\underline{D}_n = 2\,\underline{C}_n = 2\,F\left(\frac{\text{sh } 1 \cos n\,\pi}{1 + j\,n\,\pi}\right) \tag{5.38}$$

Ces coefficients peuvent se mettre sous la forme exponentielle

$$\underline{D}_n = 2\,F\left(\frac{\text{sh } 1 \cos n\,\pi}{1 + j\,n\,\pi}\right) = 2\,F\,\frac{\text{sh } 1 \cos n\,\pi}{\sqrt{1 + n^2\,\pi^2}}\, e^{-j\psi_n}$$

soit finalement

$$\underline{D}_n = D_n \, e^{-j\psi_n} \tag{5.39}$$

avec

$$D_n = 2\,F\,\frac{\text{sh } 1 \cos n\,\pi}{\sqrt{1 + n^2\,\pi^2}} \qquad \text{tg}\,\psi_n = n\,\pi$$

En reprenant les définitions (5.20) et (5.24), la réponse du système est de la forme (5.5)

$$x(t) = \bar{x} + \sum_{n}^{\infty} X_n \cos(n\,\omega t - \varphi_n - \psi_n) \tag{5.40}$$

où $\bar{x}$ représente la valeur moyenne de $x(t)$

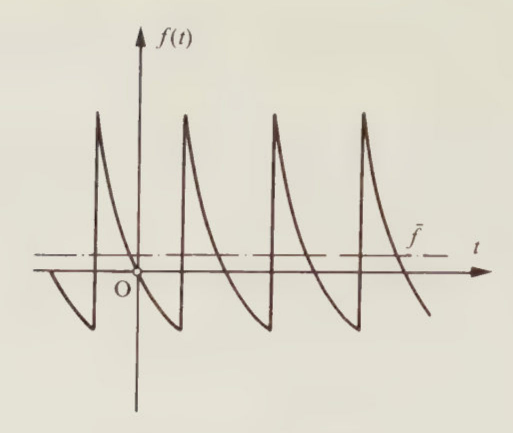
$$\bar{x} = \frac{D_0}{k} = \frac{F}{k}(\text{sh } 1 - 1) = X_0\,(\text{sh } 1 - 1) \tag{5.41}$$

et

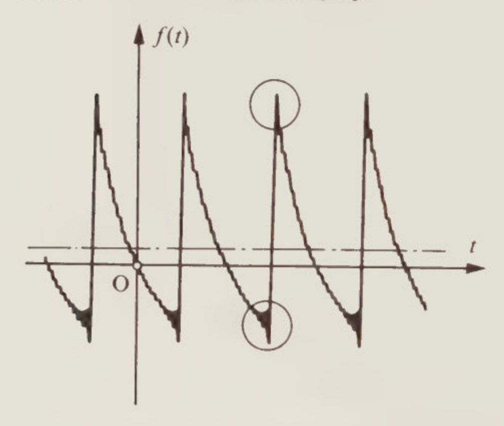
$$X_n = X_{sn}\,\mu_n = \frac{D_n}{k}\,\mu_n$$

$$X_n = 2\,X_0\,\frac{\text{sh } 1 \cos n\,\pi}{\sqrt{1 + n^2\,\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2\,\beta^2)^2 + 4\,\eta^2\,n^2\,\beta^2}} \tag{5.42}$$

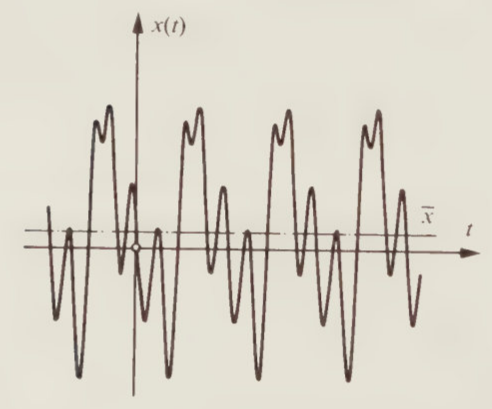
Pour représenter en fonction du temps la force extérieure et la réponse du système, les valeurs suivantes ont été adoptées



(a) $f(t)$ selon sa définition analytique



(b) décomposition de $f(t)$ en série de Fourier ($n=20$)



(c) réponse $x(t)$ du système pour $\beta=0{,}26$ $\eta=0{,}2$

Fig. 5.7 Représentation temporelle de l'excitation $f(t)$ et de la réponse $x(t)$ du système.

$$\beta = 0{,}26 \qquad \eta = 0{,}2 \qquad n = 20$$

et les amplitudes F et X_0 ont été choisies égales à l'unité.

La figure 5.7 permet alors de comparer $f(t)$, sa décomposition en série de Fourier et le mouvement $x(t)$ du système.

Commentaires

- La décomposition de $f(t)$ met en évidence le phénomène, encerclé sur la figure 5.7 (b), appelé *phénomène de Gibbs*. Il consiste en ce que toute série ou intégrale de Fourier donne naissance, à gauche et à droite d'une discontinuité, à des oscillations dont l'amplitude, lorsque n augmente, ne tend pas vers zéro mais vers une valeur qui est une proportion du saut à la discontinuité. Le coefficient de proportionnalité vaut, d'après [36]

  $$-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \simeq 0{,}0895$$

  La convergence de la série ou de l'intégrale n'en est pas affectée du fait que, lorsque n devient grand, l'espace sur lequel se produit ce phénomène tend vers zéro à l'endroit même de la discontinuité, se confondant avec celle-ci.
- Pour la valeur $\beta = 0{,}26$ $(1/4 < 0{,}26 < 1/3)$ choisie dans cet exemple, les harmoniques 3 et 4 prédominent dans la réponse $x(t)$, ce qui est bien visible sur la figure 5.7 (c).
- Quand β est supérieur à 1, la réponse du système est très proche d'une sinusoïde car le système se comporte comme un filtre passe-bas très efficace.

CHAPITRE 6

RÉGIME FORCÉ

Le régime forcé de l'oscillateur correspond à la solution complète de l'équation différentielle (2.1)

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

Il est donc la somme d'une solution particulière $x'(t)$ de l'équation avec second membre et de la solution générale $x''(t)$ de l'équation sans second membre.

Sur le plan mathématique, un problème de régime forcé peut être abordé de diverses façons. En voici quatre:

- la recherche directe de solutions particulières,
- la transformation de Laplace,
- la transformation de Fourier,
- l'analyse numérique.

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous limiterons aux transformées de Laplace et de Fourier (celle de Fourier étant d'ailleurs un cas particulier de celle de Laplace).

6.1 TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformation de Laplace permet de remplacer un problème différentiel par un problème algébrique. Nous pensons utile, pour faciliter la lecture du présent chapitre, d'en rappeler les propriétés essentielles et de donner quelques transformées élémentaires à la figure 6.1.

La *transformée de Laplace* d'une fonction $\mathrm{f}(t)$ de la variable réelle t, dite fonction génératrice et définie pour $t \geqslant 0$, est l'intégrale

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(\mathrm{f}(t))$$

Cette transformée est une fontion de la variable s, réelle ou complexe. On appelle *abscisse de convergence* le nombre réel a tel que la condition $\mathrm{Re}\,(s) > a$ assure la convergence de l'intégrale, et donc l'existence de $\mathrm{F}(s)$.

Il faut signaler que l'on utilise également, sous le nom de *transformée de Carson-Laplace,* la définition modifiée suivante

$$F'(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \mathcal{L}'(f(t))$$

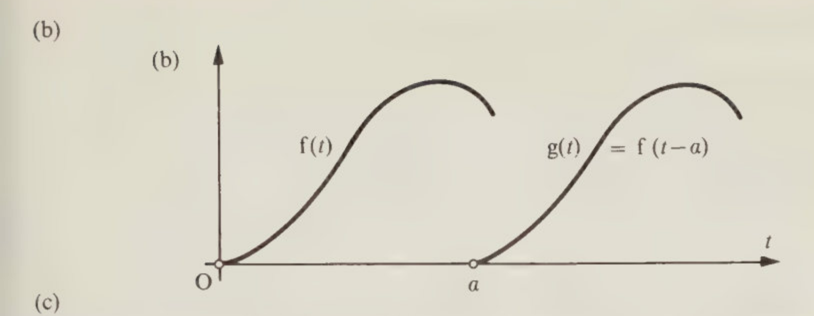
Elle présente l'avantage de transformer une constante en constante. Pour l'usage des tables, il suffit de se souvenir des relations évidentes

$$F'(s) = s\, F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} F'(s)$$

(a)

Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace		
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	Remarques
$C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t)$	$C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s)$	Théorème de linéarité
$f'(t)$ $f''(t)$ $f^n(t)$	$s\, F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - (s\, f(0) + f'(0))$ $s^n F(s) - (s^{n-1} f(0) + ... +$ $+ s\, f^{n-2}(0) + f^{n-1}(0))$	Théorème des dérivées
$h(t) = \int_0^t f(u)\ g(t-u)\, du$ $= \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$	$H(s) = F(s)\, G(s)$	Théorème de composition
$g(t) = 0$ pour $t < a$ $g(t) = f(t-a)$ pour $t \geqslant a$	$G(s) = e^{-as}\, F(s)$	Théorème du retard
$\int_{t_0}^t f(u)\, du$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{t_0}^0 f(u)\, du$	
$\int_0^t f(u)\, du$	$\frac{1}{s} F(s)$	
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	

(b)



(c)

Table de transformées de Laplace élémentaires			
$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)$	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)$
1	$\frac{1}{s}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\,\omega\, s}{(s^2+\omega^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t\, e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\mathrm{ch}\, \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$t^n\, e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\mathrm{sh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$(1+at)\, e^{at}$	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s\,(s^2+\omega^2)}$
$\frac{1}{r_1-r_2}\,(e^{r_1 t}-e^{r_2 t})$	$\frac{1}{(s-r_1)\,(s-r_2)}$	$\mathrm{ch}\, \omega t - 1$	$\frac{\omega^2}{s\,(s^2-\omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\,s\sqrt{s}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

Fig. 6.1 Transformée de Laplace
(a) tableau des propriétés fondamentales
(b) retard de la fonction g(t) sur la fonction f(t)
(c) table de transformées élémentaires

6.2 SOLUTION GÉNÉRALE DU RÉGIME FORCÉ

Revenons à l'équation (2.1)

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

et prenons la transformée de Laplace des deux membres.

Avec les notations

$$X(s) = \mathscr{L}(x(t)) \qquad x(0) = X_0 \qquad \dot{x}(0) = V_0$$

$$F(s) = \mathscr{L}(f(t))$$

il vient

$$m\left(s^2\,X(s) - s\,X_0 - V_0\right) + c\left(s\,X(s) - X_0\right) + k\,X(s) = F(s)$$

$$X(s)\,(m\,s^2+c\,s+k) = F(s) + X_0\,(m\,s+c) + V_0\,m \tag{6.1}$$

On désigne sous le nom d'*impédance opérationnelle* la quantité

$$Z(s) = m\,s^2 + c\,s + k \tag{6.2}$$

Son inverse est appelé *admittance opérationnelle* ou *fonction de transfert*

$$Y(s) = \frac{1}{m\,s^2 + c\,s + k} \tag{6.3}$$

Avant de poursuivre, il est commode d'écrire $Z(s)$ comme suit

$$Z(s) = m\left(s^2+\frac{c}{m}\,s+\frac{k}{m}\right)$$

On fait apparaître ainsi les grandeurs définies par les relations (2.2) à (2.4), soit

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \lambda = \frac{c}{2\,m} \qquad \eta = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

Il vient donc

$$Z(s) = m\,(s^2+2\,\lambda\,s+\omega_0^2) \tag{6.4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s^2 + 2\,\lambda\,s + \omega_0^2} \tag{6.5}$$

La transformée $X(s)$ de la solution cherchée $x(t)$ a pour expression, d'après (6.1) et (6.5),

$$X(s) = Y(s)\,F(s) + \frac{X_0\,(s+2\,\lambda) + V_0}{s^2 + 2\,\lambda\,s + \omega_0^2} \tag{6.6}$$

Si les fonctions inverses des deux termes du second membre sont respectivement $x_a(t)$ et $x_b(t)$, il vient

$x(t) = x_a(t) + x_b(t)$

La fonction $x_b(t)$ est connue. Après avoir déterminé l'*admittance temporelle* $y(t)$, inverse de $Y(s)$, le théorème de composition permet de calculer $x_a(t)$ par l'intégrale suivante, dite *intégrale de convolution,*

$$x_a(t) = \int_0^t y(t-u)\, f(u)\, du = \int_0^t y(u)\, f(t-u)\, du \tag{6.7}$$

Comme précédemment, il faut distinguer trois cas en fonction de la valeur de l'amortissement relatif η.

Amortissement surcritique $\eta > 1$

$\eta > 1 \Rightarrow \lambda^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$ (relation 3.35)

L'admittance peut se mettre sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{m}\, \frac{1}{s^2 + 2\,\lambda\, s + \omega_0^2} = \frac{1}{m}\, \frac{1}{(s-r_1)\,(s-r_2)}$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases}$$

d'où, en utilisant la table des transformées,

$$y(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{2\, m\, \omega_1}\,(e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\, \omega_1}\, \text{sh}\, \omega_1 t \tag{6.8}$$

Pour $x_b(t)$, le plus commode est d'utiliser la relation (3.41). Le régime forcé est ainsi

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \frac{1}{m\, \omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u}\, \text{sh}\, \omega_1 u \cdot f(t-u)\, du + \\ & + e^{-\lambda t}\,\left(X_0\, \text{ch}\, \omega_1 t + \frac{\lambda\, X_0 + V_0}{\omega_1}\, \text{sh}\, \omega_1 t\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Amortissement critique $\eta = 1$

$\eta = 1 \Rightarrow \lambda = \omega_0$

L'admittance devient

$$Y(s) = \frac{1}{m}\, \frac{1}{s^2 + 2\,\omega_0\, s + \omega_0^2} = \frac{1}{m}\, \frac{1}{(s+\omega_0)^2}$$

Par conséquent, d'après la table

$$y(t) = \frac{t}{m} \mathrm{e}^{-\omega_0 t} \tag{6.10}$$

La fonction $x_b(t)$ étant donnée par (3.47), on a

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t u \, \mathrm{e}^{-\omega_0 u} f(t-u) \, \mathrm{d}u + \big(X_0 + (\omega_0 X_0 + V_0)\, t\big) \, \mathrm{e}^{-\omega_0 t} \tag{6.11}$$

Amortissement sous-critique $\eta < 1$

$\eta < 1 \;\Rightarrow\; \lambda^2 < \omega_0^2 \;\Rightarrow\; \omega_1^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

Pour utiliser la table, le plus commode est de procéder comme suit

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\,\lambda\, s + \omega_0^2} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s+\lambda)^2 + \omega_0^2 - \lambda^2} = \frac{1}{m\,\omega_1} \frac{\omega_1}{(s+\lambda)^2 + \omega_1^2}$$

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{m\,\omega_1} \sin \omega_1 t \tag{6.12}$$

Ce résultat ainsi que les relations (3.57) et (3.58) déterminent le régime forcé

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega_1} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u} \sin \omega_1 u \cdot f(t-u) \, \mathrm{d}u + X \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \tag{6.13}$$

avec

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda\, X_0 + V_0}{\omega_1}\right)^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda\, X_0 + V_0}{\omega_1\, X_0}$$

Les intégrales figurant dans les relations précédentes (cas particuliers de l'*intégrale de Duhamel*) sont à la base de certaines méthodes d'analyse numérique que nous n'aborderons pas ici. Quand la force extérieure $f(t)$ est définie par une fonction analytique, il est presque toujours préférable de remplacer le calcul de ces intégrales par l'inversion directe du produit $Y(s)\ F(s)$ au moyen des tables de transformées.

A titre d'exemples, nous allons maintenant calculer les régimes forcés provoqués par deux sollicitations typiques

- une impulsion de force ou de déplacement,
- un échelon de force ou de déplacement.

Ces régimes sont appelés respectivement *réponse impulsionelle* et *réponse indicielle.* Nous admettrons que les conditions initiales sont nulles. Si tel n'est pas le cas, il suffit de rajouter la fonction $x_b(t)$ (régime libre) correctement choisie.

6.3 RÉPONSES À UNE IMPULSION ET À UN ÉCHELON DE FORCE

6.3.1 Réponse impulsionnelle

Supposons qu'une force extérieure F, très intense (force impulsionnelle), soit appliquée à l'oscillateur durant un intervalle de temps ε très court (fig. 6.2). Par analogie avec la distribution de Dirac, une telle sollicitation est appelée *impulsion de Dirac* si le produit $F\,\varepsilon$ est égal à l'unité quand $\varepsilon \to 0$ et $F \to \infty$.

$$F\,\varepsilon = 1 \qquad [F\,\varepsilon] = 1\ \text{N s} = 1\ \text{Newton} \times \text{seconde}$$

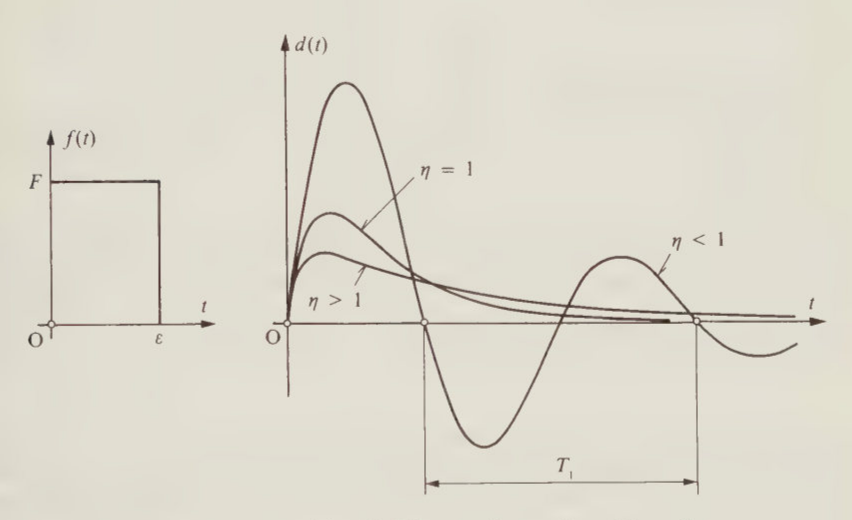


Fig. 6.2 Impulsion de Dirac et réponse impulsionnelle.

On démontre que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est égale à 1. Dès lors, si l'on désigne par $d(t)$ la réponse de l'oscillateur, dite *réponse impulsionnelle*, on aura d'après (6.6)

$$D(s) = Y(s) \cdot 1 \;\Rightarrow\; d(t) = y(t) \tag{6.14}$$

Cette réponse est ainsi particulièrement simple et intéressante; elle est égale à l'admittance temporelle définie et calculée à la section 6.2. Cependant, avant de poursuivre, il faut observer que les dimensions physiques de ces grandeurs sont différentes. En effet, si le déplacement $x(t)$ est une longueur, on établit l'analyse dimensionnelle suivante (m = mètre, kg = kilogramme, s = seconde, N = newton, J = joule)

- réponse impulsionnelle $[d(t)] = \text{m}$
- admittance temporelle $[y(t)] = \text{s/kg}$
- admittance opérationnelle $[Y(s)] = N/m = \text{s}^2/\text{kg}$
- variable de Laplace $[s] = [\omega_0] = 1/\text{s}$ (quelle que soit la valeur de $x(t)$)

Cette remarque faite, on peut utiliser directement les résultats précédents.

Amortissement surcritique $\eta > 1$

$$d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{2\, m\, \omega_1}(e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\, \omega_1}\,\mathrm{sh}\,\omega_1 t \tag{6.15}$$

Amortissement critique $\eta = 1$

$$d(t) = \frac{t}{m}\, e^{-\omega_0 t} \tag{6.16}$$

Amortissement sous-critique $\eta < 1$

$$d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\, \omega_1}\sin \omega_1 t \tag{6.17}$$

La figure 6.2 représente $d(t)$ pour les trois valeurs types de l'amortissement relatif. Il est facile de vérifier que les trois courbes ont une tangente commune à l'origine

$$\dot{d}(0) = \frac{1}{m} \qquad [\dot{d}(0)] = \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s}}{\mathrm{s^2 \cdot kg}} = \mathrm{m/s} \tag{6.18}$$

Ainsi, la vitesse de la masse passe brusquement de zéro à $1/\mathrm{m}$, quel que soit l'amortissement. Cette discontinuité de la vitesse nécessite une accélération infinie, donc une force infinie. C'est bien le cas pour une impulsion de Dirac, mais dans un intervalle $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ de durée nulle (on ne peut pas contrôler une telle affirmation en calculant $d(t)$ à partir des relations précédentes qui ne sont valables que pour $t > \varepsilon$).

L'énergie fournie initialement au système est sous forme cinétique uniquement. Elle a pour valeur

$$T(0) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{d}^2(0) = \frac{1}{2\, m} \qquad [T(0)] = \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{s}\right)^2 = \mathrm{N \cdot m} = \text{joule} \tag{6.19}$$

Elle est donc égale à 1/2 joule quand la masse de l'oscillateur est de 1 kg.

En résumé, la réponse $d(t)$ de l'oscillateur à une impulsion de Dirac correspond à l'admittance temporelle $y(t)$ ainsi qu'au régime libre avec les conditions initiales $X_0 = 0$ et $V_0 = 1/m$.

6.3.2 Réponse indicielle

On appelle *échelon de force* une force extérieure ainsi définie (fig. 6.3)

$f(t) = 0 \qquad$ pour $t < 0$
$f(t) = 1 \qquad$ pour $t \geqslant 0$

Sa transformée de Laplace est donc $F(s)=1/s$. En désignant par $e(t)$ la réponse correspondante de l'oscillateur, dite réponse indicielle, la relation (6.6) donne

$$E(s) = \frac{1}{s}\, Y(s) \tag{6.20}$$

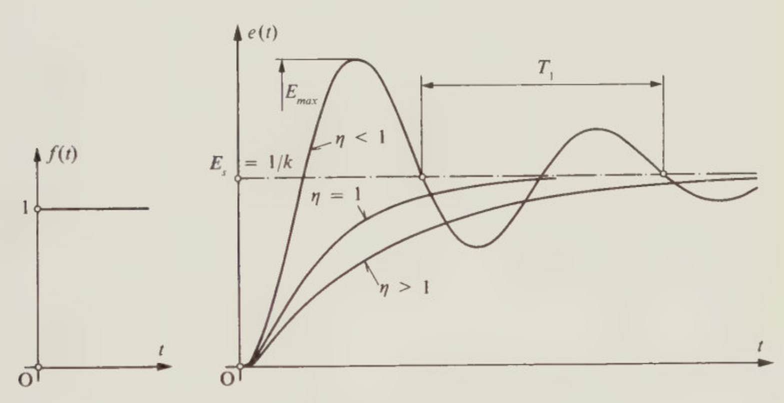


Fig. 6.3 Echelon de force et réponse indicielle.

Amortissement surcritique $\eta > 1 \;\Rightarrow\; \omega_1^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$

$$E(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s(s-r_1)\,(s-r_2)} \tag{6.21}$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases}$$

On décompose la fraction en éléments simples

$$E(s) = \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s-r_1} + \frac{\gamma}{s-r_2}\right) \;\Rightarrow\; e(t) = \frac{1}{m}\left(\alpha + \beta\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \gamma\,\mathrm{e}^{r_2 t}\right)$$

L'identification donne les trois équations suivantes

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \alpha\,(r_1+r_2) + \beta\, r_2 + \gamma\, r_1 \\ 1 = \alpha\, r_1\, r_2 \end{cases}$$

qui ont pour solutions

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{r_1\, r_2} = \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{m}{k} \\ \beta = \dfrac{1}{r_1\,(r_1 - r_2)} = \dfrac{-1}{2\,\omega_1\,(\lambda - \omega_1)} \\ \gamma = \dfrac{-1}{r_2\,(r_1 - r_2)} = \dfrac{1}{2\,\omega_1\,(\lambda + \omega_1)} \end{cases}$$

La réponse de l'oscillateur est ainsi

$$e(t) = \frac{1}{k} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\,m\,\omega_1}\left(\frac{e^{\omega_1 t}}{\lambda - \omega_1} - \frac{e^{-\omega_1 t}}{\lambda + \omega_1}\right)$$

Comme

$$(\lambda - \omega_1)\,(\lambda + \omega_1) = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

elle peut se mettre sous la forme

$$e(t) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\lambda t}\,(\text{ch}\,\omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1}\,\text{sh}\,\omega_1 t)\right) \qquad (6.22)$$

Il s'agit d'une fonction non périodique qui tend vers une asymptote horizontale correspondant au déplacement statique (fig. 6.3).

$$E_s = \frac{1}{k} \qquad [E_s] = \frac{\text{N}}{\text{N/m}} = \text{m} \qquad (6.23)$$

Amortissement critique $\eta = 1 \Rightarrow \lambda = \omega_0$

$$E(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s\,(s + \omega_0)^2} \qquad (6.24)$$

On a successivement

$$E(s) = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{s} + \frac{\beta}{(s + \omega_0)^2} + \frac{\gamma s}{(s + \omega_0)^2}\right)$$

$$e(t) = \frac{1}{m}\left(a + \beta\, t\, e^{-\omega_0 t} + \gamma\,\;(1 - \omega_0 t)\, e^{-\omega_0 t}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = a + \gamma \\ 0 = 2\,a\,\omega_0 + \beta \\ 1 = a\,\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{\omega_0^2} \\ \beta = \dfrac{-2}{\omega_0} \\ \gamma = \dfrac{-1}{\omega_0^2} \end{cases}$$

$$e(t) = \frac{1}{k}\left(1 - (1+\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right) \tag{6.25}$$

Cette fonction a la même allure que la précédente.

Amortissement sous-critique $\eta < 1 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

$$E(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s\left((s+\lambda)^2 + \omega_1^2\right)} \tag{6.26}$$

On peut procéder comme suit

$$E(s) = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{s} + \frac{\beta + \gamma\,s}{(s+\lambda)^2+\omega_1^2}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{s} + \gamma\,\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2 + \omega_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta - \gamma\,\lambda}{\omega_1}\,\frac{\omega_1}{(s+\lambda)^2 + \omega_1^2}\right)$$

$$e(t) = \frac{1}{m}\left(a + \gamma\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos\omega_1 t + \frac{\beta - \gamma\,\lambda}{\omega_1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega_1 t\right)$$

$$\begin{cases} 0 = a + \gamma \\ 0 = 2\,a\,\lambda + \beta \\ 1 = a(\lambda^2+\omega_1^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{\lambda^2 + \omega_1^2} = \dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{m}{k} \\ \beta = -2\,a\,\lambda = \dfrac{-2\,m\,\lambda}{k} \\ \gamma = -\dfrac{m}{k} \end{cases}$$

$$e(t) = \frac{1}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right) \tag{6.27}$$

Le déplacement $e(t)$ subit des oscillations décroissantes autour de la position d'équilibre E_s.

Quand cette position est atteinte – donc en principe après un temps infini – et quel que soit l'amortissement relatif, la force extérieure a fourni au système un travail

$$H_\infty = 1 \cdot E_s = \frac{1}{k} \qquad [H] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \text{joule} \tag{6.28}$$

alors que l'énergie potentielle accumulée a pour valeur

$$V_\infty = \frac{1}{2}\, k\, E_s^2 = \frac{1}{2\,k} \tag{6.29}$$

Cette énergie, égale à 1/2 joule quand la rigidité est de 1 N/m, représente ainsi la moitié du travail de la force extérieure. L'autre moitié a donc été dissipée par la résistance c.

En résumé, lors de la réponse $e(t)$ à un échelon de force, l'oscillateur tend vers une position d'équilibre statique $E_s = 1/k$; la moitié du travail fourni est accumulée alors que l'autre moitié est détruite.

Si la force extérieure est un échelon F_0 au lieu d'un échelon unité, il suffit de multiplier les relations (6.22), (6.25) et (6.27) par F_0 en raison de la linéarité du système. Quant à l'énergie potentielle finale, elle devient

$$V_\infty(F_0) = \left(\frac{F_0}{1}\right)^2 V_\infty = \frac{F_0^2}{2\,k} \tag{6.30}$$

6.3.3 Relation entre les réponses impulsionnelle et indicielle

La réponse $d(t)$ à une impulsion de Dirac est la dérivée par rapport au temps de la réponse $e(t)$ à un échelon de force. Pour le démontrer, écrivons la relation (6.6) pour ces deux réponses

$$D(s) = Y(s) \cdot 1$$

$$E(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s}$$

On a donc

$$D(s) = s\, E(s) \tag{6.31}$$

Prenons la transformée de Laplace de $\dot{e}(t) = \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$

$$\mathscr{L}\big(\dot{e}(t)\big) = sE(s) \qquad \big(e(0) = 0\big) \tag{6.32}$$

Il vient, en comparant (6.31) et (6.32)

$$D(s) = \mathscr{L}\big(\dot{e}(t)\big) \tag{6.33}$$

et par conséquent

$$d(t) = \dot{e}(t) \tag{6.34}$$

6.4 RÉPONSES À UNE IMPULSION ET À UN ÉCHELON DU DÉPLACEMENT ÉLASTIQUE

6.4.1 Introduction

On rencontre souvent, dans la littérature, une conception des réponses indicielle et impulsionnelle légèrement différente de celle présentée au paragraphe précédent. Il s'agit des réponses de l'oscillateur à une impulsion et à un échelon du *déplacement élastique* $x_e(t)$. Rappelons que $x_e(t)$ est le déplacement que provoquerait la force extérieure $f(t)$ sur un système ne comportant que la rigidité k (relation (2.6))

$$x_e(t) = \frac{1}{k} f(t)$$

Les conditions initiales étant supposées nulles, revenons à la relation (6.6)

$$X(s) = k\ Y(s) \cdot \frac{1}{k} F(s) = k\ Y(s) \cdot X_e(s)$$

Avec

$$X_e(s) = \mathscr{L}\left(x_e(t)\right)$$

Par analogie avec la réponse en fréquence $\underline{H}(\omega)$ définie par la relation (4.24), on donne le nom de *réponse opérationnelle* au produit $k\ Y(s)$, soit d'après (6.5)

$$H(s) = \frac{k}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \omega_0^2 \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{2\lambda s}{\omega_0^2} + 1} = \frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{2\eta s}{\omega_0} + 1} \tag{6.35}$$

Avant de poursuivre, on peut formuler les remarques suivantes

- la quantité $H(s)$ apparaît en prenant la transformée de Laplace de la relation (2.7);
- si $s = j\omega$, $H(s)$ devient $\underline{H}(\omega)$;
- $H(s)$ n'a pas de dimension physique.

6.4.2 Réponse impulsionnelle

Si le déplacement $x_e(t)$ est une impulsion de Dirac, $X_e(s) = 1$ et $X(s) = H(s)$. La fonction du temps correspondant $h(t)$ est la réponse impulsionnelle à une impulsion de déplacement élastique. On la détermine directement à partir des relations (6.15) à (6.17), compte tenu de (3.35).

Amortissement surcritique $\eta > 1$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\eta^2-1}}\,e^{-\lambda t}\,(e^{\omega_1 t}-e^{-\omega_1 t}) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\eta^2-1}}\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{sh}\,\omega_1 t \tag{6.36}$$

Amortissement critique $\eta = 1$

$$h(t) = \omega_0^2\, t\, e^{-\omega_0 t} \tag{6.37}$$

Amortissement sous-critique $\eta < 1$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\eta^2}}\,e^{-\lambda t}\sin\omega_1 t \tag{6.38}$$

Les courbes $h(t)$ présentent exactement la même allure que les courbes $d(t)$ de la figure 6.2.

6.4.3 Réponse indicielle

Quand le déplacement $x_e(t)$ est un échelon unité, $X(s)=\frac{1}{s}$ et $X(s)=H(s)/s$. La fonction du temps $g(t)$ est alors la réponse indicielle à un échelon de déplacement élastique. Elle peut être déterminée à partir des relations (6.22), (6.25) et (6.27) qu'il suffit de multiplier par la rigidité k . Les courbes correspondantes ont la même allure que celles de la figure 6.3.

Amortissement surcritique $\eta > 1$

$$g(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,(\mathrm{ch}\,\omega_1 t+\frac{\lambda}{\omega_1}\,\mathrm{sh}\,\omega_1 t) \tag{6.39}$$

Amortissement critique $\eta = 1$

$$g(t) = 1 - (1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t} \tag{6.40}$$

Amortissement sous-critique $\eta < 1$

$$g(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,(\cos\omega_1 t+\frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1 t) \tag{6.41}$$

6.5 TRANSFORMATION DE FOURIER

Cette transformation, la plus couramment utilisée en analyse vibratoire, est souvent présentée comme un cas particulier de la transformation de Laplace , celui où la variable de Laplace s est purement imaginaire et notée $j\omega$.

Nous pensons préférable de l'établir ici comme extension aux fonctions non périodiques de la décomposition en séries de Fourier.

Nous avons vu au chapitre 5 qu'une fonction périodique, de période T, peut être représentée par une série de Fourier, c'est-à-dire par une série infinie de fonctions harmoniques de pulsation $n\omega$ ($n=0$, ± 1, ± 2, ...) où $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation fondamentale. Si l'on fait tendre la période T vers l'infini, de manière que le premier intervalle de temps croisse indéfiniment, la fonction devient non périodique. Dans ce processus, les fréquences discrètes se rapprochent toujours plus les unes des autres jusqu'à constituer un spectre continu. A ce moment, la série de Fourier devient l'*intégrale de Fourier*.

Reprenons la fonction périodique de la figure 5.1 qui s'exprimait par la série de Fourier sous forme complexe (5.12)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{C}_n \, e^{jn\omega t} \qquad \omega = 2\pi/T$$

et dont les coefficients $\underline{C}_n$ s'obtenaient par (5.13)

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

En adoptant les notations suivantes

$$n\,\omega = \omega_n$$

$$(n+1)\,\omega - n\,\omega = \omega = 2\pi/T = \Delta\omega_n$$

nous pouvons mettre les relations précédentes sous la forme

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}(T\,\underline{C}_n)\, e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(T\,\underline{C}_n)\, e^{j\omega_n t}\,\Delta\omega_n \qquad (6.42)$$

$$T\,\underline{C}_n = \int_0^T f(t)\, e^{-j\omega_n t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\omega_n t}\, dt \qquad (6.43)$$

Lorsque la période croît indéfiniment, $T\to\infty$, l'indice n peut être éliminé et la variable discrète ω_n devient la variable continue ω. Après passage à la limite, la sommation est remplacée par une intégration et l'on obtient

$$f(t) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\omega_n\to 0}} \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(T\,\underline{C}_n)\, e^{j\omega_n t}\,\Delta\omega_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (6.44)$$

$$\underline{F}(\omega) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\omega_n\to 0}} (T\,\underline{C}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{6.45}$$

La relation (6.44) exprime le fait qu'une fonction quelconque $f(t)$ peut être décrite par une intégrale représentant les contributions des composantes harmoniques ayant un spectre de fréquence continu de $-\infty$ à $+\infty$.

La relation (6.45) définit la transformée de Fourier $\underline{F}(\omega)$ de la fonction du temps $f(t)$. On peut dire que la quantité $\underline{F}(\omega)\, d\omega$ représente la contribution à $f(t)$ des harmoniques comprises dans le domaine des fréquences limité par ω et $\omega + d\omega$.

Les intégrales

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{6.46}$$

et

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{6.47}$$

constituent une *paire de transformées* dans laquelle $f(t)$ est appelé *transformée de Fourier inverse* de $\underline{F}(\omega)$.

Par analogie avec la décomposition en séries de Fourier, les relations (6.46) et (6.47) donnent la composition en fréquences de la fonction non périodique $f(t)$.

La représentation de $f(t)$ par l'intégrale (6.47) n'est possible que si l'intégrale (6.46) existe. Pour cela, $f(t)$ doit satisfaire la condition de Dirichlet[1] dans le domaine temporel $-\infty < t < \infty$ et l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\, |\, dt \tag{6.48}$$

doit être convergente. Dans le cas où cette dernière diverge, la transformée de Fourier $\underline{F}(\omega)$ n'existe pas et la fonction peut être généralement traitée par la transformée de Laplace (à condition que cette transformée soit elle-même convergente).

Il est facile de voir que si l'excitation $f(t)$ est mise sous la forme (5.12), la réponse complexe $\underline{x}(t)$ de l'oscillateur devient, par (5.17) et (5.19)

$$\underline{x}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{Y}_n\, \underline{C}_n\, e^{jn\omega t} = \frac{1}{k} \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{H}_n\, \underline{C}_n\, e^{jn\omega t} \tag{6.49}$$

Dans cette relation, $\underline{Y}_n$ et $\underline{H}_n$ sont respectivement l'admittance complexe et la réponse complexe en fréquence relatives à la pulsation $n\omega$.

---

[1] La fonction $f(t)$ satisfait la condition de Dirichlet dans l'intervalle (a, b) si
- $f(t)$ n'a qu'un nombre fini de maximums et minimums dans (a, b) et
- $f(t)$ n'a qu'un nombre fini de discontinuités dans l'intervalle (a, b) et aucune discontinuité infinie.

En procédant de la même manière que pour $f(t)$, nous pouvons écrire la réponse complexe du système à une excitation quelconque non périodique sous la forme d'une paire de transformées de Fourier

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{6.50}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{6.51}$$

Les transformées de la réponse complexe et de l'excitation sont liées par la condition

$$\underline{X}(\omega) = \underline{Y}(\omega)\, \underline{F}(\omega) = \frac{1}{k}\, \underline{H}(\omega)\, \underline{F}(\omega) \tag{6.52}$$

6.6 EXEMPLES DE RÉGIMES FORCÉS

6.6.1 Réponse temporelle à une force $F \cos \omega t$

Au moyen de la transformation de Laplace, calculer le régime forcé d'un oscillateur élémentaire sur lequel on applique au temps $t=0$ la force extérieure $f(t)=F \cos \omega t$. On suppose que les conditions initiales sont nulles, $X_0=0$, $V_0=0$.

On utilise les relations (6.6) et (6.5)

$$X(s) = Y(s)\, F(s) \qquad\qquad Y(s) = \frac{1}{m}\, \frac{1}{s^2 + 2\,\lambda\, s + \omega_0^2}$$

Dans le cas particulier

$$F(s) = \mathscr{L}(F \cos \omega t) = F\, \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

et par conséquent

$$X(s) = \frac{F}{m}\, \frac{s}{(s^2+\omega^2)\,(s^2+2\,\lambda\, s+\omega_0^2)} \tag{6.53}$$

Après décomposition en éléments simples et inversion, il vient, tous calculs faits

$$x(t) = X\left(\cos(\omega t-\varphi) - \xi\, e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t-\varphi_1)\right) \tag{6.54}$$

avec

$$\xi = \mu\, \sqrt{(1-\beta^2)^2 + \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\,(1+\beta^2)^2} \qquad\qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\lambda}{\omega_1}\, \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \tag{6.55}$$

Quant aux autres symboles, ils ont la signification habituelle

$$X = \mu \frac{F}{k} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \eta = \frac{\lambda}{\omega_0} \qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 (1-\eta^2) \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\eta\beta}{1-\beta^2}$$

La fonction $x(t)$ peut présenter des allures fort différentes en fonction de la valeur des paramètres principaux du problème que sont la pulsation relative β et l'amortissement relatif η. Prenons l'exemple suivant

$$f = 5 \text{ Hz} \qquad f_0 = 17 \text{ Hz} \qquad \eta = 0{,}05 \qquad \mu \frac{F}{k} = X = 1$$

A partir de ces valeurs, on trouve

$$\omega = 2\pi f = 31{,}4 \ s^{-1} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0 = 106{,}8 \ s^{-1} \qquad \omega_1 = 106{,}7 \ s^{-1}$$

$$\beta = \frac{5}{17} = 0{,}294 \qquad \lambda = 5{,}34 \ s^{-1}$$

$$\mu = 1{,}094 \qquad \xi = 1{,}0013 \qquad \varphi = 0{,}032 \qquad \varphi_1 = 0{,}060$$

Le régime forcé est maintenant déterminé (fig. 6.4)

$$x(t) = \cos(31{,}4\,t - 0{,}032) - 1{,}0013\,\mathrm{e}^{-5{,}34\,t} \cos(106{,}7\,t - 0{,}060)$$

$$x(t) = x'(t) + x''(t)$$

Il comprend le régime permanent $x'(t)$, de pulsation ω, ainsi qu'un terme transitoire $x''(t)$ qui oscille à la pulsation propre ω_1 et disparaît pratiquement après une quinzaine de périodes.

Rappelons que le même problème peut être résolu sans utiliser la transformation de Laplace. En effet, la solution de l'équation de l'oscillateur

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos\omega t$$

est la somme de la solution générale $x''(t)$ de l'équation sans second membre et d'une solution particulière $x'(t)$ de l'équation complète

$$x(t) = x'(t) + x''(t) \tag{6.56}$$

Les relations (4.4) à (4.6) déterminent

$$x'(t) = X\cos(\omega t - \varphi) \tag{6.57}$$

avec $X = \dfrac{F}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega c}{k - \omega^2 m}$

La relation (3.57) donne $x''(t)$ (on écrit X_1 et φ_1 pour éviter toute confusion avec les grandeurs ci-dessus)

$$x''(t) = X_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega_1 t - \varphi_1) \tag{6.58}$$

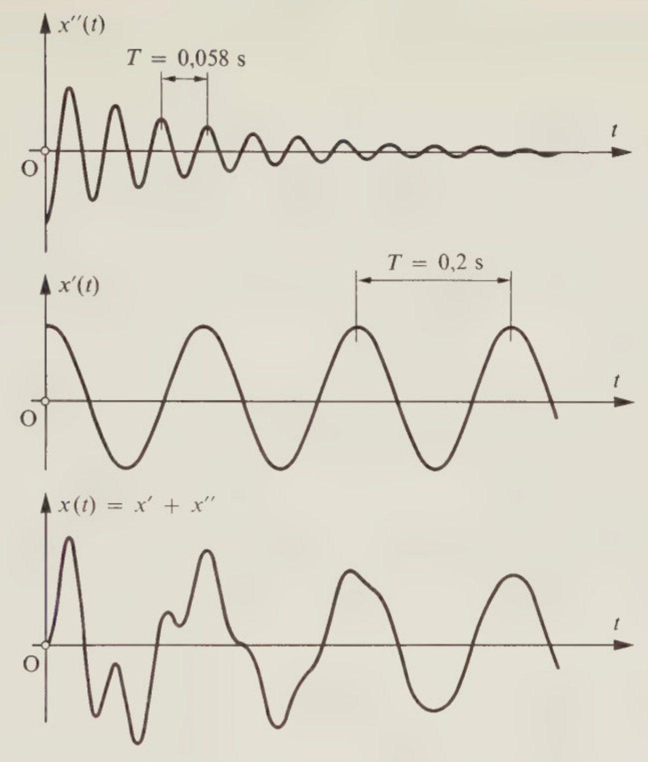


Fig. 6.4 Régime forcé dû à une force $F \cos \omega t$.

Les conditions initiales $x(0)=0$ et $\dot{x}(0)=0$ permettent de calculer les inconnues X_1 et φ_1 et de retrouver le résultat précédent, donné par (6.54) et (6.55).

6.6.2 Réponse en fréquence à une excitation rectangulaire

Calculer la réponse $x(t)$ d'un oscillateur à une excitation rectangulaire $f(t)$ en utilisant la transformée de Fourier. Représenter les spectres de fréquences associés à $f(t)$ et $x(t)$.

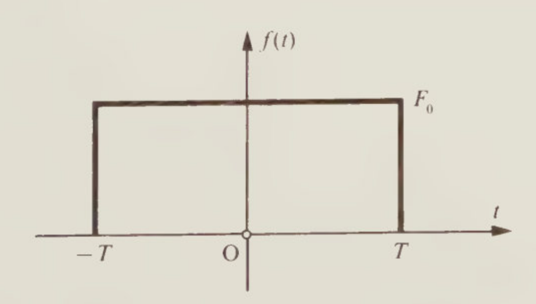


Fig. 6.5 Force d'excitation rectangulaire.

La fonction $f(t)$ est définie par

$$f(t) = F_0 \quad \text{pour} \quad -T < t < T$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < -T \text{ et } t > T$$

L'équation différentielle du système s'écrit

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

En divisant les deux membres par la rigidité k et en adoptant les notations usuelles, il vient

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x} + \frac{2\,\eta}{\omega_0}\dot{x} + x = \frac{1}{k}f(t) \tag{6.59}$$

Prenant la transformée de Fourier de chaque membre, on peut écrire

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,\mathrm{j}\,\eta\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{X}(\omega) = \frac{1}{k}\,\underline{F}(\omega) \tag{6.60}$$

ou encore

$$\underline{X}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,\mathrm{j}\,\eta\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}\;\frac{1}{k}\,\underline{F}(\omega) \tag{6.61}$$

Au second membre, on reconnaît la réponse complexe en fréquence $\underline{H}(\omega)$ définie par (4.24). On retrouve bien la relation (6.52)

$$\underline{X}(\omega) = \frac{1}{k}\,\underline{H}(\omega)\,\underline{F}(\omega) \tag{6.62}$$

La fonction $f(t)$ n'ayant que deux discontinuités et aucune discontinuité infinie, elle satisfait la condition de Dirichlet. La transformée de Fourier de $f(t)$ a pour expression

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = F_0\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{F}(\omega) = \frac{F_0}{\mathrm{j}\,\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\right) = 2\,F_0\,\frac{\sin\omega\,T}{\omega} \tag{6.63}$$

En utilisant (6.62) et (6.63), la transformée de Fourier de la réponse s'écrit

$$\underline{X}(\omega) = \frac{2\,F_0}{k}\,\frac{\sin\omega\,T}{\omega\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,\mathrm{j}\,\eta\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right)} \tag{6.64}$$

Nous allons déterminer les parties réelle et imaginaire, puis le module et la phase de $\underline{X}(\omega)$. Il vient successivement

$$\operatorname{Re}\left(\underline{X}(\omega)\right) = \frac{2\,F_0}{k}\,\frac{\sin \omega t}{\omega}\,\frac{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\,\eta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{6.65}$$

$$\operatorname{Im}\left(\underline{X}(\omega)\right) = \frac{2F_0}{k}\,\frac{\sin \omega t}{\omega}\,\frac{-\,2\,\eta\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\,\eta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{6.66}$$

$$|\,\underline{X}(\omega)\,| = \frac{2\,F_0}{k}\left|\frac{\sin \omega\,T}{\omega}\right|\frac{1}{\left(\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\,\eta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2}} \tag{6.67}$$

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{sgn}(\sin \omega T)\right) \tag{6.68}$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{-2\,\eta\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{6.69}$$

Le spectre associé à la force d'excitation $f(t)$ est représenté par la figure 6.6. Quant aux fonctions (6.65) à (6.68), elles sont illustrées pour un amortissement relatif $\eta = 0{,}25$ par les figures 6.7 à 6.10.

Pour la recherche de la transformée inverse, il est avantageux de décomposer (6.64) en éléments simples

$$\underline{X}(\omega) = \frac{F_0}{k}\left(\frac{2\sin \omega T}{\omega} - \left(\frac{\lambda}{\omega_1}+\mathrm{j}\right)\frac{\sin \omega T}{\lambda + \mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega_1} + \left(\frac{\lambda}{\omega_1}-\mathrm{j}\right)\frac{\sin \omega T}{\lambda+\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_1}\right) \tag{6.70}$$

avec

$\lambda = \eta\,\omega_0$ et $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\eta^2}$

En exprimant $\sin \omega T$ par sa forme exponentielle, la réponse temporelle s'écrit d'après (6.51)

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+T)} - e^{j\omega(t-T)}}{j\omega}\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\left(1 - j\frac{\lambda}{\omega_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+T)} - e^{j\omega(t-T)}}{\lambda + j\omega - j\omega_1}\,d\omega\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4\pi}\left(1 + j\frac{\lambda}{\omega_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+T)} - e^{j\omega(t-T)}}{\lambda + j\omega + j\omega_1}\,d\omega\right) \tag{6.71}$$

Pour évaluer cette expression, il faut connaître les valeurs des trois intégrales suivantes, que l'on peut calculer par des intégrales de contour dans le plan complexe

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega u}}{j\omega}\,d\omega = \begin{cases} -\pi & \text{si } u < 0 \\ \pi & \text{si } u > 0 \end{cases}$$
$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega u}}{\lambda + j\omega - j\omega_1}\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2\pi\, e^{-\lambda u}\, e^{j\omega_1 u} & \text{si } u > 0 \end{cases} \tag{6.72}$$
$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega u}}{\lambda + j\omega + j\omega_1}\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2\pi\, e^{-\lambda u}\, e^{-j\omega_1 u} & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

La variable u prend les valeurs

$$u_1 = t + T$$
$$u_2 = t - T$$

On doit donc considérer les trois intervalles de temps

- $t < -T$ $\quad u_1 < 0 \;,\; u_2 < 0$
- $-T < t < T$ $\quad u_1 > 0 \;,\; u_2 < 0$
- $T < t$ $\quad u_1 > 0 \;,\; u_2 > 0$

On obtient successivement

- $t < -T$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\frac{1}{2\pi}(-\pi+\pi) - 0 - 0\right) = 0 \tag{6.73}$$

- $-T < t < T$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\frac{1}{2\pi}(\pi+\pi) - \frac{1}{2}\left(1 - j\frac{\lambda}{\omega_1}\right) e^{-\lambda(t+T)}\, e^{j\omega_1(t+T)}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 + j\frac{\lambda}{\omega_1}\right) e^{-\lambda(t+T)}\, e^{-j\omega_1(t+T)}\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-\lambda(t+T)}\left(\cos\omega_1(t+T) + \frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1(t+T)\right)\right) \tag{6.74}$$

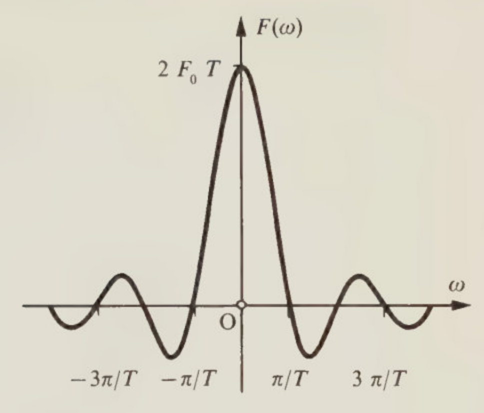


Fig. 6.6 Spectre associé à la force d'excitation $f(t)$.

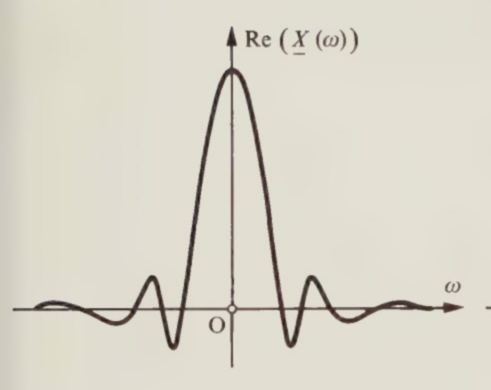


Fig. 6.7 Spectre associé à la partie réelle de la réponse $\underline{X}(\omega)$.

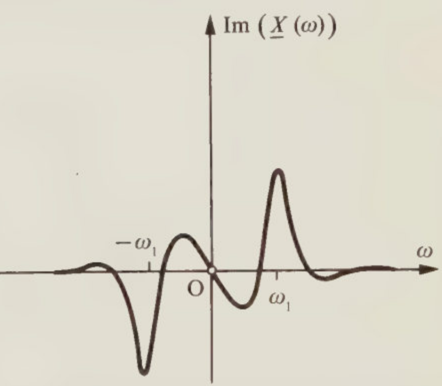


Fig. 6.8 Spectre associé à la partie imaginaire de la réponse $\underline{X}(\omega)$.

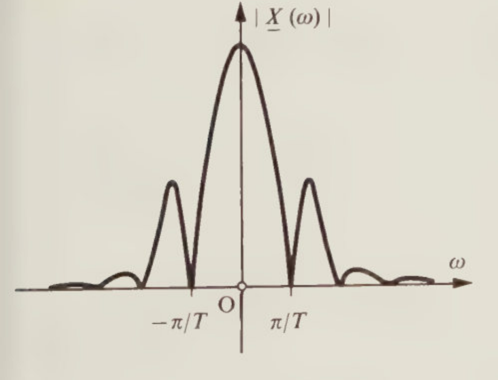


Fig. 6.9 Spectre associé au module $|\underline{X}(\omega)|$ de la réponse $x(t)$.

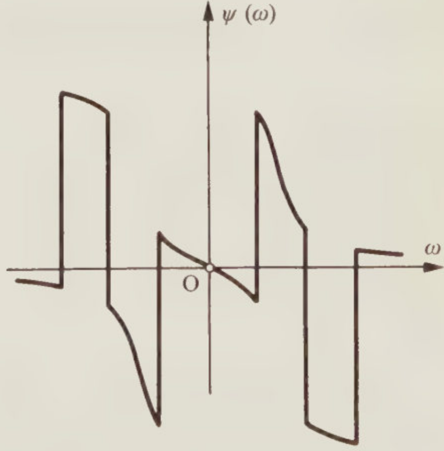


Fig. 6.10 Spectre associé à la phase de la réponse $x(t)$.

- $T < t$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\frac{1}{2\pi}(\pi-\pi) - \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{j}\frac{\lambda}{\omega_1}\right)(\mathrm{e}^{-\lambda(t+T)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega_1(t+T)} - \mathrm{e}^{-\lambda(t-T)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega_1(t-T)})\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{j}\frac{\lambda}{\omega_1}\right)(\mathrm{e}^{-\lambda(t+T)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1(t+T)} - \mathrm{e}^{-\lambda(t-T)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1(t-T)})\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(t-T)}\left(\cos\omega_1(t-T) + \frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1(t-T)\right)\right.$$
$$\left. -\mathrm{e}^{-\lambda(t+T)}\left(\cos\omega_1(t+T) + \frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1(t+T)\right)\right) \qquad (6.75)$$

La figure 6.11 montre l'allure de cette réponse.

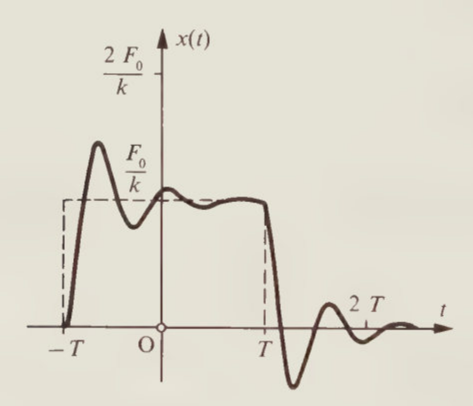


Fig. 6.11 Réponse $x(t)$ de l'oscillateur dissipatif.

La réponse du système conservatif peut être obtenue en prenant la limite de $x(t)$ quand η tend vers zéro. On obtient

$$\lim_{\eta\to 0} \lambda = 0 \qquad \lim_{\eta\to 0} \omega_1 = \omega_0$$

- $t < -T$

$$x(t) = 0 \qquad (6.76)$$

- $-T < t < T$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1-\cos\omega_0(t+T)\right) \qquad (6.77)$$

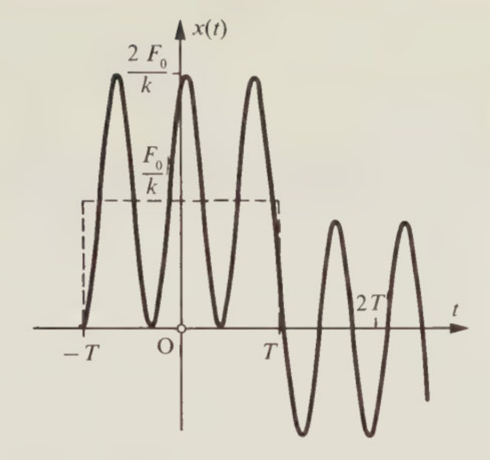


Fig. 6.12 Réponse $x(t)$ de l'oscillateur conservatif.

- $T < t$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\big(\cos \omega_0\,(t-T) - \cos \omega_0(t+T)\big) = \frac{F_0}{k}\,2 \sin \omega_0 T \sin \omega_0 t \tag{6.78}$$

La figure 6.12 représente cette réponse dans le cas $T/T_0 = 1{,}43$ et $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

On constate que cette réponse est non nulle pour $t > T$ si $T \neq n\pi/\omega_0 = nT_0/2$ pour n entier. Comme une réponse du type $x(t) = \sin \omega_0 t$ ne satisfait pas la condition d'intégrabilité (6.48), le passage à la limite $\eta = 0$ doit être fait après l'intégration. En fait

$$\lim_{\eta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega u}}{\lambda + \mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega_1}\,\mathrm{d}\omega \neq \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega u}}{\lambda+\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_1}\right)\mathrm{d}\omega \tag{6.79}$$

On voit donc que le calcul de la réponse d'un système conservatif au moyen de la transformée de Fourier exige des précautions particulières.

Commentaires

- Par opposition au résultat de l'exemple 5.3.2. on constate ici que les spectres associés à la force excitatrice et à la réponse $x(t)$ sont continus.
- La prédominance de la fondamentale de pulsation ω_1 est illustrée par des pics proches de $\pm\omega_1$ (fig. 6.8 et 6.9). L'amplitude de ces pics tend vers l'infini quand l'amortissement tend vers zéro.

CHAPITRE 7

ANALOGIES ÉLECTRIQUES

7.1 GÉNÉRALITÉS

Comme nous l'avions dit dans l'introduction, il est parfois avantageux de chercher le système électrique équivalent à un système mécanique.

L'utilité d'un système électrique équivalent ne réside plus, comme autrefois, dans la possibilité de réaliser ce système, puis de mesurer les grandeurs électriques correspondant aux grandeurs mécaniques dont la mesure était, à l'époque, relativement difficile. En effet, les méthodes d'analyse numérique sont plus commodes et plus riches en possibilités. L'intérêt d'un schéma électrique réside dans la facilité d'interprétation du rôle joué par les différents éléments du système.

L'oscillateur élémentaire de la mécanique comprend trois éléments discrets, une masse, un ressort et un amortisseur. Il en est de même pour l'oscillateur élémentaire de l'électrotechnique qui comporte une capacité, une self-inductance et une résistance.

Si l'on veut établir une analogie entre ces deux oscillateurs, les éléments dissipatifs, soit l'amortisseur et la résistance, vont nécessairement se correspondre. En ce qui concerne les éléments conservatifs, il apparaît une double possibilité:

- la masse correspond à la self-inductance et le ressort à la capacité; il s'agit de l'*analogie force-tension*,
- la masse correspond à la capacité et le ressort à la self-inductance; il s'agit de l'*analogie force-courant*.

La seconde analogie sera seule examinée dans ce chapitre car elle est préférable dans presque tous les problèmes de la pratique. En effet, ce sont généralement les forces extérieures qui sont connues, or il est plus commode de considérer dans les raisonnements des sommes de courants que des sommes de tensions.

7.2 ANALOGIE FORCE-COURANT

L'analogie force-courant, appelée également analogie de mobilité, fait correspondre à l'oscillateur élémentaire en régime libre le schéma électrique de la figure 7.1.

La somme des trois courants est nulle, comme la somme des forces sur la masse

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \tag{7.1}$$

D'autre part, l'égalité des chutes de tension donne

$$\frac{1}{C}\int i_1 \, \mathrm{d}t = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R\, i_3 \tag{7.2}$$

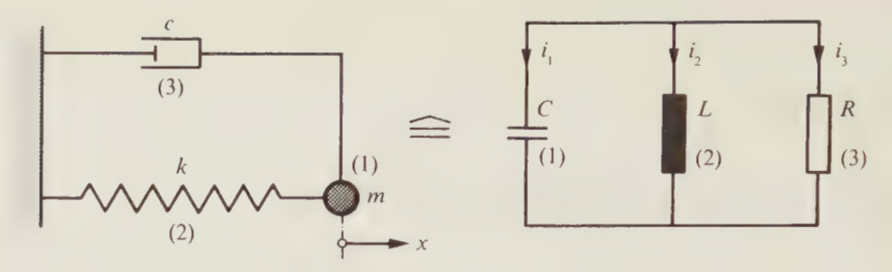


Fig. 7.1 Analogie force-courant · Régime libre.

En éliminant i_1 et i_3

$$i_1 = L\,C\,\frac{d^2\,i_2}{dt^2} \qquad\qquad i_3 = \frac{L\,di_2}{R\,dt}$$

L'équation (7.1) devient

$$L\,C\,\frac{d^2\,i_2}{dt^2} + i_2 + \frac{L}{R}\,\frac{di_2}{dt} = 0$$

Faisons apparaître le flux dans la self $\Phi = L\,i_2$

$$C\,\ddot{\Phi} + \frac{\dot{\Phi}}{R} + \frac{\Phi}{L} = 0 \tag{7.3}$$

Les deux équations équivalentes (7.1) et (7.3), comparées à celle de l'oscillateur mécanique

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

conduisent aux correspondances ci-dessous.

Forces-courants

$m\,\ddot{x} \triangleq i_1$	la force d'inertie correspond au courant dans la capacité,
$k\,x \triangleq i_2$	la force de rappel élastique correspond au courant dans la self,
$c\,\dot{x} \triangleq i_3$	la force de résistance visqueuse correspond au courant dans la résistance électrique.

Déplacement-flux et leurs dérivées

$x \triangleq \Phi$	le déplacement correspond au flux dans la self,
$v = \dot{x} \triangleq \dot{\Phi} = u$	la vitesse (égale pour les trois éléments mécaniques) correspond à la tension (égale sur les trois éléments électriques).

Caractéristiques des deux systèmes

$m \triangleq C$ — la masse correspond à la capacité,

$k \triangleq \dfrac{1}{L}$ — la rigidité correspond à l'inverse de la self,

$c \triangleq \dfrac{1}{R}$ — la résistance mécanique visqueuse correspond à l'inverse de la résistance électrique.

Energies

$\dfrac{m\,v^2}{2} \triangleq \dfrac{C\,u^2}{2}$ — l'énergie cinétique correspond à l'énergie électrostatique,

$\dfrac{k\,x^2}{2} \triangleq \dfrac{\Phi^2}{2\,L}$ — l'énergie potentielle correspond à l'énergie électromagnétique,

$c\,v^2 \triangleq \dfrac{u^2}{R} = R\,i_3^2$ — la puissance dissipée dans l'amortisseur correspond à la puissance dissipée dans la résistance électrique.

En régime forcé, les schémas équivalents de l'analogie force-courant peuvent être trouvés aisément par un raisonnement qualitatif. Nous allons traiter deux exemples.

Une force harmonique agit sur la masse

La force correspondant au courant, l'équivalent d'un *générateur de force* $f = F \cos \omega t$ est un *générateur de courant* $i = I \cos \omega t$.

La force f se divise en trois parties:
- la première accélère la masse, elle correspond au courant dans la capacité;
- la deuxième déplace le ressort, elle correspond au courant dans la self;
- la troisième déplace l'amortisseur, elle correspond au courant dans la résistance.

On obtient ainsi le schéma de la figure 7.2.

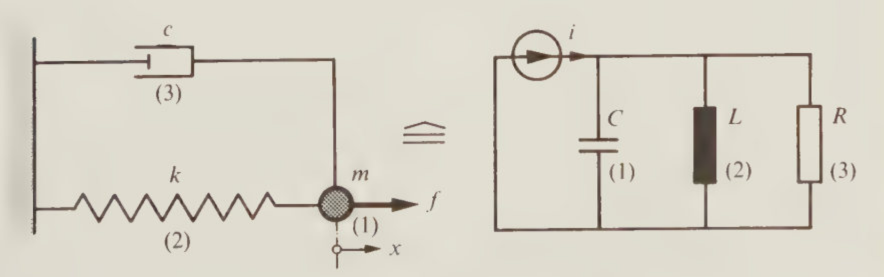


Fig. 7.2 Analogie force-courant · Une force agit sur la masse.

Un déplacement $x = X \cos \omega t$ est imposé à la masse

Une même vitesse $\dot{x} = -\omega\ X \sin \omega t = V \cos \omega t'$ est communiquée aux trois éléments du système. La vitesse correspondant à la tension, un *générateur de vitesse* a pour équivalent un *générateur de tension* $u = U \cos \omega t'$ qui alimente en parallèle les trois éléments du schéma électrique de la figure 7.3.

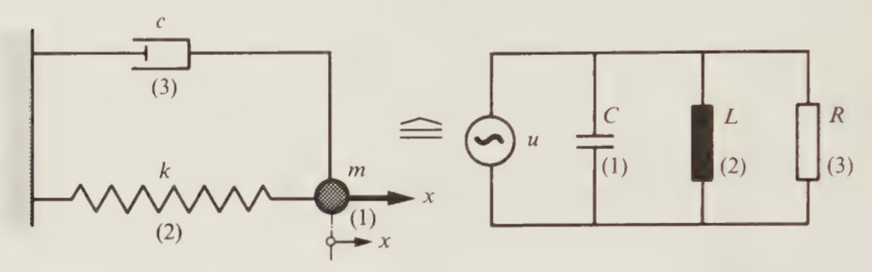


Fig. 7.3 Analogie force-courant · Un déplacement est imposé à la masse.

7.3 EXTENSION AUX SYSTÈMES À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ · CIRCUITS DE FORCES

Les raisonnements faits précédemment peuvent être étendus, en général facilement, à des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Une justification complète, par comparaison des équations différentielles, ne présente guère d'intérêt. Elle sort de toute façon du cadre de ce chapitre, consacré aux analogies électriques de l'oscillateur élémentaire.

Nous nous limiterons à l'exemple de la figure 7.4. Il concerne l'analogie de mobilité d'un système à trois degrés de liberté sur lequel agit une force harmonique.

Dans l'analogie de mobilité, les correspondances s'établissent comme suit

Niveau **A**	2 forces → 2 courants	
	force d'inertie sur m_1	$\triangleq$ courant dans C_1
	force élastique sur k_{12}	$\triangleq$ courant dans L_{12}
Niveau **B**	4 forces → 4 courants	
	force d'inertie sur m_2	$\triangleq$ courant dans C_2
	force élastique sur k_2	$\triangleq$ courant dans L_2
	force visqueuse sur c_2	$\triangleq$ courant dans R_2
	force élastique sur k_{23}	$\triangleq$ courant dans L_{23}
Niveau **C**	3 forces → 3 courants	
	force d'inertie sur m_3	$\triangleq$ courant dans C_3
	force élastique sur k_3	$\triangleq$ courant dans L_3
	force visqueuses sur c_3	$\triangleq$ courant dans R_3

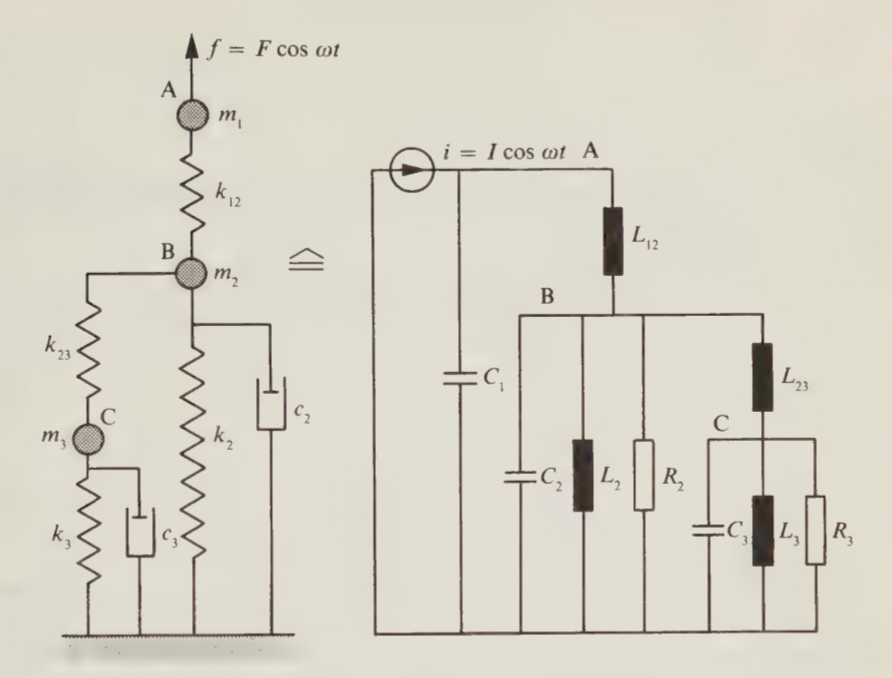


Fig. 7.4 Analogie de mobilité · Système à 3 degrés de liberté.

La comparaison des schémas de la figure 7.4 conduit aux commentaires suivants:

- Les conditions de sommes nulles de courants aux nœuds (équivalentes aux sommes des forces) ainsi que les possibilités de résonances apparaissent plus clairement sur le schéma électrique.
- Par contre, si l'on se pose la question du nombre de degrés de liberté que possède le système, on voit immédiatement que la réponse est 3 pour le schéma mécanique (position des 3 masses, par exemple), alors que cela demande un peu plus de réflexion pour le schéma électrique (tension aux niveaux A, B, C, par exemple).

Il est possible de représenter le schéma mécanique avec une morphologie identique à celle du schéma électrique en procédant de la façon illustrée par la figure 7.5 pour le cas d'un oscillateur excité par une force harmonique $f = F\cos \omega t$. Cette figure comprend le schéma mécanique habituel (a), le schéma mécanique modifié (circuit de forces) avec le symbole graphique d'un générateur de force harmonique (b) et le schéma électrique (c).

En adoptant cette manière de faire, les deux schémas de la figure 7.4 prennent la forme représentée par la figure 7.6.

Dès lors l'analogie de mobilité conduit à la notion de *circuits de forces*, tout à fait équivalente aux circuits de courants de l'électrotechnique. Avec un peu d'habitude, la représentation du schéma électrique correspondant au système mécanique n'est plus nécessaire. On représente directement les circuits de forces et l'on calcule ou mesure les impédances mécaniques du système étudié. On aboutit ainsi à la *méthode des impédances mécaniques* qui a pris de l'importance ces dernières années, essentiellement sur

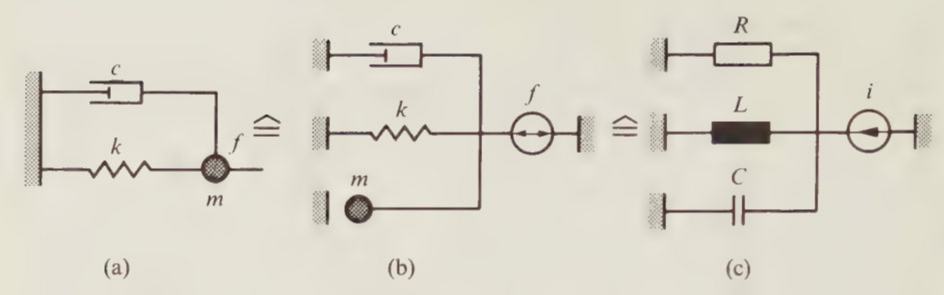


Fig. 7.5 Analogie de mobilité · Circuit de forces.

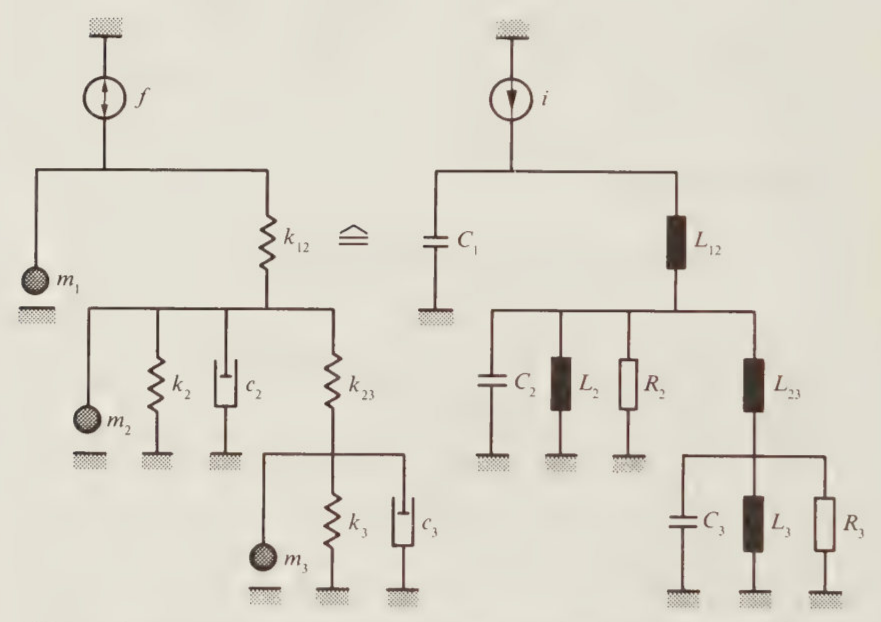


Fig. 7.6 Analogie de mobilité · Circuit de forces · Système à trois degrés de liberté.

le plan expérimental. En particulier, cette méthode est avantageuse pour l'étude des systèmes complexes qui peuvent être décomposés en plusieurs sous-systèmes dont l'analyse est plus facile. Le regroupement des résultats permet alors de décrire, en tout cas dans certaines circonstances bien définies, le comportement du système complet.

Il serait cependant hasardeux de penser que tous les moyens d'analyse et les résultats de la théorie des circuits électriques peuvent être transposés sans autre aux circuits de forces. En effet, la mesure des impédances mécaniques est plus laborieuse que celle des impédances électriques et, surtout, les possibilités de confiner correctement un sous-système sont en général beaucoup plus réduites.

CHAPITRE 8

SYSTÈMES À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

8.1 GÉNÉRALITÉS · NOTION DE COUPLAGE

Un système mécanique possède deux degrés de liberté quand sa configuration peut être décrite au moyen de deux fonctions du temps $x_1(t)$ et $x_2(t)$, appelées coordonnées généralisées au sens de la mécanique lagrangienne. Il peut s'agir de longueurs (m), d'angles (radian), de volumes (m^3), etc. Si le système est linéaire et que ses caractéristiques sont des constantes, son comportement en régime libre est régi, dans le cas le plus général, par les deux équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} m_{11}\,\ddot{x}_1 + c_{11}\,\dot{x}_1 + k_{11}\,x_1 + m_{12}\,\ddot{x}_2 \quad + c_{12}\,\dot{x}_2 \quad + k_{12}\,x_2 \quad = 0 \\ m_{22}\,\ddot{x}_2 + c_{22}\,\dot{x}_2 + k_{22}\,x_2 + m_{21}\,\ddot{x}_1 \quad + c_{21}\,\dot{x}_1 \quad + k_{21}\,x_1 \quad = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

Termes propres	Termes de couplage inertiel	Termes de couplage résistif	Termes de couplage élastique

Chaque équation comporte trois termes propres, ainsi que trois termes de couplage représentant l'action de x_2 sur x_1, respectivement de x_1 sur x_2. Tous ces termes ont la nature de forces généralisées, c'est-à-dire de forces proprement dites (N), de moments (N·m), de pressions (N/m^2), etc. Dès lors, les équations signifient que deux sommes de six forces sont nulles. Les termes $m_{12}\,\ddot{x}_2$ et $m_{21}\,\ddot{x}_1$ sont les forces de *couplage inertiel* (ou couplage de masse). Les termes $c_{12}\,\dot{x}_2$ et $c_{21}\,\dot{x}_1$ représentent les forces de *couplage résistif* de nature visqueuse (résistances linéaires). Enfin, les termes $k_{12}\,x_2$ et $k_{21}\,x_1$ correspondent aux forces de *couplage élastique*, les plus fréquentes en pratique.

Une étude complète des systèmes à deux degrés de liberté, telle que nous l'avons faite pour l'oscillateur élémentaire, n'entre pas en ligne de compte. D'une part, elle serait extrêmement fastidieuse en raison du nombre de paramètres existants (onze au lieu de deux pour l'oscillateur élémentaire), d'autre part les propriétés essentielles des solutions peuvent être établies, de manière générale, pour un système oscillant linéaire comportant n degrés de liberté. Dans ce chapitre, nous nous bornerons à étudier le régime libre du système conservatif, puis à examiner de manière détaillée le couplage élastique. Le chapitre suivant traitera un exemple de régime forcé, l'oscillateur de Frahm.

Revenons aux équations (8.1) mises sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.2}$$

ou, en condensant l'écriture

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{8.3}$$

On adopte les définitions suivantes,

$\boldsymbol{x}$ vecteur des déplacements,
$\dot{\boldsymbol{x}}$ vecteur des vitesses,
$\ddot{\boldsymbol{x}}$ vecteur des accélérations,
$[M]$ matrice des masses (ou matrice des coefficients d'inertie),
$[C]$ matrice d'amortissement (ou matrice des pertes),
$[K]$ matrice de rigidité (ou matrice de raideur).

Ces définitions seront conservées dans l'étude de l'oscillateur généralisé.

A titre d'exemple, cherchons les termes des matrices pour le schéma canonique de la figure 8.1, correspondant à un oscillateur dissipatif à deux degrés de liberté, sans couplage inertiel.

Les équations de Newton du système s'écrivent

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{x}_1 = -\,k_1\,x_1 - k_3\,(x_1 - x_2) - c_1\,\dot{x}_1 - c_3\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\,\ddot{x}_2 = -\,k_2\,x_2 - k_3\,(x_2 - x_1) - c_2\,\dot{x}_2 - c_3\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

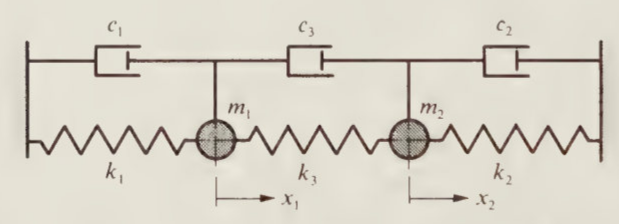


Fig. 8.1 Schéma canonique d'un oscillateur à deux degrés de liberté.

ou encore

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{x}_1 + (c_1 + c_3)\,\dot{x}_1 - c_3\,\dot{x}_2 + (k_1 + k_3)\,x_1 - k_3\,x_2 = 0 \\ m_2\,\ddot{x}_2 - c_3\,\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\,\dot{x}_2 - k_3\,x_1 + (k_2 + k_3)\,x_2 = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

La comparaison des relations (8.2) et (8.4) donne

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Les trois matrices sont symétriques. Nous montrerons plus tard qu'il en est toujours ainsi pour un oscillateur linéaire discret.

8.2 RÉGIME LIBRE ET MODES PROPRES DU SYSTÈME CONSERVATIF

Quand les résistances de la figure 8.1 sont nulles, les équations (8.4) prennent la forme simple

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_3)\, x_1 - k_3\, x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_3\, x_1 + (k_2+k_3)\, x_2 = 0 \end{cases} \tag{8.6}$$

Il s'agit d'équations différentielles linéaires pour lesquelles on cherche des solutions exponentielles de la forme

$$x_1 = A_1\, \mathrm{e}^{pt} \qquad x_2 = A_2\, \mathrm{e}^{pt}$$

On obtient ainsi les conditions algébriques

$$\begin{cases} (m_1 p^2+k_1+k_3)\, A_1 - k_3\, A_2 = 0 \\ -k_3\, A_1 + (m_2 p^2+k_2+k_3)\, A_2 = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

Ce système homogène n'a de solutions non toutes nulles (les solutions nulles correspondent à l'équilibre statique) que si son déterminant est nul

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2 p^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.8}$$

soit, en développant

$$p^4 + p^2 \left(\frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_1 m_2} = 0 \tag{8.9}$$

Cette équation, dite *équation caractéristique* ou *équation aux pulsations propres*, admet quatre solutions purement imaginaires, conjuguées deux à deux, $\pm \mathrm{j}\omega_1$ et $\pm \mathrm{j}\omega_2$.

En effet, la forme générale de l'équation (8.9) est

$$p^4 + B\, p^2 + C = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{2}\left(- B \pm \sqrt{B^2-4\,C} \right)$$

Les quantités B et C étant essentiellement positives, les deux solutions p^2 sont négatives si la racine est réelle, c'est-à-dire si la différence $B^2-4\,C$ est positive

$$B^2 - 4\,C = \left(\frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4\, \frac{(k_1+k_3)\,(k_2+k_3) - k_3^2}{m_1\, m_2}$$

$$B^2 - 4\,C = \left(\frac{k_1+k_3}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2 + 4\,\frac{k_3^2}{m_1\,m_2} > 0$$

On a donc effectivement

$$p_1^2 < 0 \;\Rightarrow\; p_1 = \pm\,\mathrm{j}\omega_1 \qquad p_2^2 < 0 \;\Rightarrow\; p_2 = \pm\,\mathrm{j}\omega_2$$

Les équations (8.7) étant homogènes, les amplitudes A_i ne sont définies qu'à un facteur près. On ne peut alors déterminer que le rapport β_2 entre les amplitudes A_2 et A_1

$$\beta_2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{m_1\,p^2 + k_1 + k_3}{k_3} = \frac{k_3}{m_2\,p^2 + k_2 + k_3} \tag{8.10}$$

Ce rapport est un nombre réel qui prend deux valeurs distinctes en fonction des solutions, β_{21} pour $\pm\mathrm{j}\omega_1$ et β_{22} pour $\pm\mathrm{j}\omega_2$. On obtient

$$\begin{cases} \beta_{21} = \dfrac{k_1 + k_3 - m_1\,\omega_1^2}{k_3} = \dfrac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2\,\omega_1^2} \\[2ex] \beta_{22} = \dfrac{k_1 + k_3 - m_1\,\omega_2^2}{k_3} = \dfrac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2\,\omega_2^2} \end{cases} \tag{8.11}$$

Soient A_{11}, A_{12} et A_{21}, A_{22} les valeurs de A_1 et A_2 quand β_2 vaut respectivement β_{21} et β_{22}

$$\beta_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \qquad\qquad \beta_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}}$$

Le système d'équations (8.6) admet dès lors les solutions particulières suivantes

pour x_1 $\quad \mathrm{A}_{11}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}$, $\mathrm{A}_{11}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}$, $\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t}$, $\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 t}$,

pour x_2 $\quad \mathrm{A}_{21}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}$, $\mathrm{A}_{21}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}$, $\mathrm{A}_{22}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t}$, $\mathrm{A}_{22}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 t}$.

Les solutions générales sont obtenues par combinaison linéaire des solutions particulières

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\,(C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t} + D_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}) + A_{12}\,(C_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t} + D_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 t}) \\ x_2 = A_{21}\,(C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t} + D_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}) + A_{22}\,(C_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t} + D_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 t}) \end{cases} \tag{8.12}$$

Les constantes C_1, D_1, C_2 et D_2 sont arbitraires; de plus, comme les A_{ij} ne sont définis qu'à un facteur près, les solutions peuvent être mises sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = \beta_{21}\,X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22}\,X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \tag{8.13}$$

1er mode $\qquad$ 2ème mode

ou sous forme matricielle

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}_1 X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \boldsymbol{\beta}_2 X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \qquad (8.14)$$

avec

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{Bmatrix} \qquad (8.15)$$

Les équations ci-dessus comprennent 4 constantes d'intégration, X_1, X_2, φ_1, φ_2, fonctions des conditions initiales. Elles font apparaître la notion de *modes propres* sur laquelle nous reviendrons en détail dans l'étude de l'oscillateur généralisé. Un *mode propre* est le *mouvement du système lié à une pulsation propre* (ou, ce qui revient au même, à une fréquence propre).

Nous avons admis que le système examiné ne comporte pas de résistances. Les pulsations propres ω_1 et ω_2 sont donc équivalentes à la pulsation ω_0 de l'oscillateur élémentaire conservatif étudié à la section 3.1. On aurait pu, par souci de cohérence, adopter les notations ω_{01} et ω_{02} au lieu de ω_1 et ω_2. Cependant, aucune confusion n'étant à craindre dans ce chapitre, il en serait résulté une surcharge inutile de l'écriture.

Un système à deux degrés de liberté possède donc deux modes propres. En choisissant les conditions initiales de façon que $X_2 = 0$, le système oscille selon le premier mode seulement. Il oscille selon le deuxième mode si $X_1 = 0$. Dans le cas général, les deux modes existent simultanément, mais n'ont pas d'influence réciproque, c'est-à-dire qu'aucun échange d'énergie ne s'effectue de l'un à l'autre. Cette propriété importante, appelée *orthogonalité des modes propres,* sera établie plus tard. Elle exprime l'indépendance linéaire des vecteurs propres $\boldsymbol{\beta}$ et se traduit ici par les deux relations

$$\boldsymbol{\beta}_1^T [M] \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{\beta}_1^T [K] \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \qquad (8.16)$$

soit, après développement

$$\begin{cases} m_1 + m_2 \beta_{21} \beta_{22} = 0 \\ k_1 + k_2 \beta_{21} \beta_{22} + k_3 (1-\beta_{21})(1-\beta_{22}) = 0 \end{cases} \qquad (8.17)$$

Le rôle des modes propres apparaît clairement quand le système présente une symétrie géométrique (fig. 8.2). Dans ce cas

$$m_1 = m_2 = m \qquad k_1 = k_2 = k$$

et l'équation caractéristique (8.9) devient

$$p^4 + p^2 \frac{2(k+k_3)}{m} + \frac{k^2 + 2 k k_3}{m^2} = 0 \qquad (8.18)$$

Elle a pour solutions

$$p^2 = -\frac{k + k_3}{m} \pm \frac{k_3}{m} \qquad (8.19)$$

Les pulsations propres sont ainsi

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k + 2\,k_3}{m} \tag{8.20}$$

Les rapports β_{21} et β_{22} des relations (8.11) prennent alors les valeurs $+1$ et -1. En effet

$$\beta_{21} = \frac{k + k_3 - m\,\omega_1^2}{k_3} = +1 \qquad \beta_{22} = \frac{k + k_3 - m\,\omega_2^2}{k_3} = -1 \tag{8.21}$$

Le premier mode correspond à des oscillations identiques des deux masses

$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \tag{8.22}$$

alors que le deuxième mode correspond à des oscillations en opposition de phase

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \tag{8.23}$$

Trois exemples d'oscillateurs symétriques à deux degrés de liberté sont représentés par les figures 8.2 à 8.4.

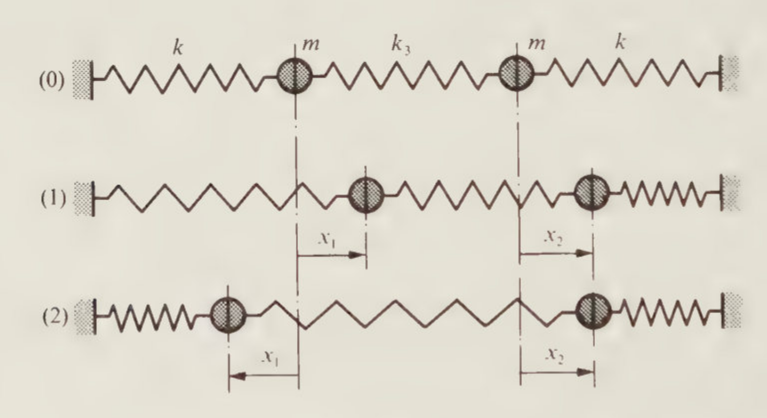


Fig. 8.2 Modes propres d'un oscillateur symétrique à deux degrés de liberté. Système de référence
(0) système en équilibre statique
(1) 1[er] mode, déplacements identiques des 2 masses $x_2 = x_1$
(2) 2[ème] mode, déplacements opposés des 2 masses $x_2 = -x_1$.

On peut formuler quelques remarques à propos de ces exemples.

- La configuration statique correspondant à un mode propre s'appelle *forme propre* du système. Cette notion sera généralisée par la suite. Ainsi, la première et la deuxième formes propres sont représentées sur chacune des figures.

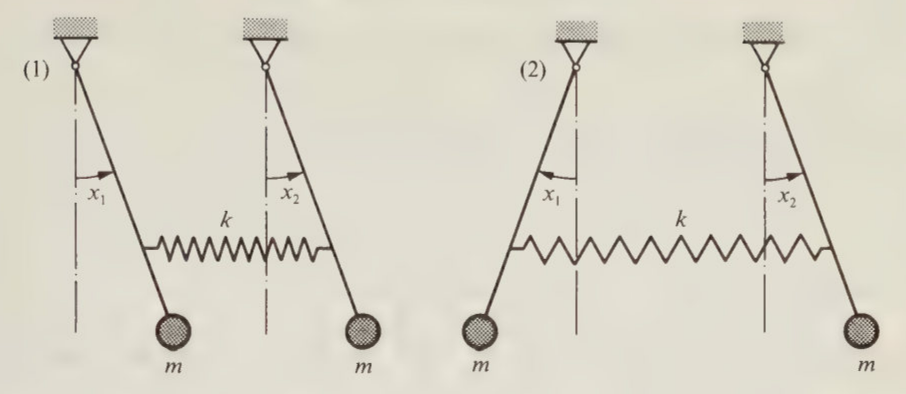


Fig. 8.3 Modes propres du pendule double symétrique
(1) 1er mode, $x_2 = x_1$
(2) 2ème mode, $x_2 = -x_1$.

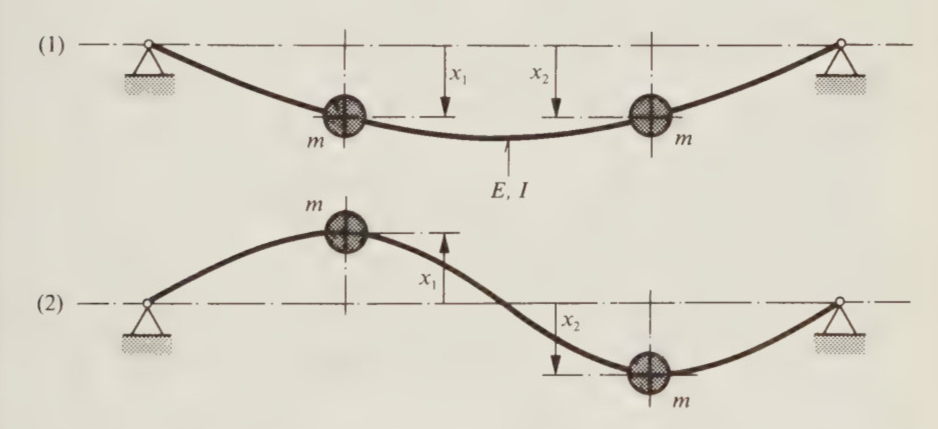


Fig. 8.4 Modes propres du système constitué de deux masses égales, symétriquement placées sur une poutre sans masse, oscillant en flexion dans un plan
(1) 1er mode, $x_2 = x_1$
(2) 2ème mode, $x_2 = -x_1$.

- Pour le système de référence et le pendule double, la rigidité de couplage n'est pas sollicitée dans le premier mode en raison de la symétrie, alors qu'elle est fortement sollicitée dans le deuxième mode. Cette affirmation ne peut être appliquée sans autre au dernier exemple, relatif à une poutre en flexion. On remarquera cependant que la première forme propre a une courbure unique alors que la deuxième en possède deux, séparées par un point d'inflexion.
- Pour une même valeur du déplacement x_1 (par exemple la valeur normée $|x_1| = 1$), l'énergie potentielle du premier mode est inférieure à celle du second mode. Elle consiste en énergie de déformation dans les trois exemples avec en plus, dans le cas du pendule double, l'énergie potentielle de position des masses.

8.3 ÉTUDE DU COUPLAGE ÉLASTIQUE

Revenons à l'équation caractéristique (8.8) en remplaçant p par jω, puis en divisant la première ligne par m_1 et la deuxième par m_2

$$\begin{vmatrix} \dfrac{k_1 + k_3}{m_1} - \omega^2 & -\dfrac{k_3}{m_1} \\ \dfrac{-k_3}{m_2} & \dfrac{k_2 + k_3}{m_2} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Le premier membre est une fonction de ω^2 et l'on peut écrire, après développement

$$\mathrm{f}(\omega^2) = \left(\frac{k_1+k_3}{m_1} - \omega^2\right)\left(\frac{k_2+k_3}{m_2} - \omega^2\right) - \frac{k_3^2}{m_1\, m_2} = 0 \qquad (8.24)$$

On introduit les *pulsations de couplage à zéro*, ainsi définies (fig. 8.5),

$\Omega_1^2 = \dfrac{k_1 + k_3}{m_1}$ pulsation de m_1 quand m_2 est bloquée,

$\Omega_2^2 = \dfrac{k_2 + k_3}{m_2}$ pulsation de m_2 quand m_1 est bloquée.

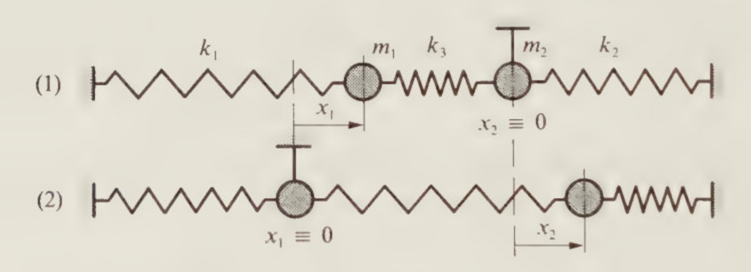


Fig. 8.5 Couplage à zéro dans le système de référence
(1) m_2 est couplée à zéro
(2) m_1 est couplée à zéro.

En désignant d'autre part par Ω_{12}^4 le terme caractérisant le couplage élastique

$$\Omega_{12}^4 = \frac{k_3^2}{m_1\, m_2} \qquad (8.25)$$

l'équation (8.24) devient

$$\mathrm{f}(\omega^2) = (\Omega_1^2 - \omega^2)\,(\Omega_2^2 - \omega^2) - \Omega_{12}^4 = 0 \qquad (8.26)$$

La fonction $\mathrm{f}(\omega^2)$ est une parabole (fig. 8.6) coupant l'axe horizontal aux points ω_1^2 et ω_2^2 correspondant aux deux pulsations propres du système. L'intersection de la

parabole avec l'horizontale $f(\omega^2) = -\Omega_{12}^4$ donne les deux pulsations de couplage à zéro.

Ces considérations géométriques conduisent aux inégalités suivantes, qu'il est facile d'établir algébriquement

$$\omega_1^2 < \Omega_1^2 < \Omega_2^2 < \omega_2^2 \tag{8.27}$$

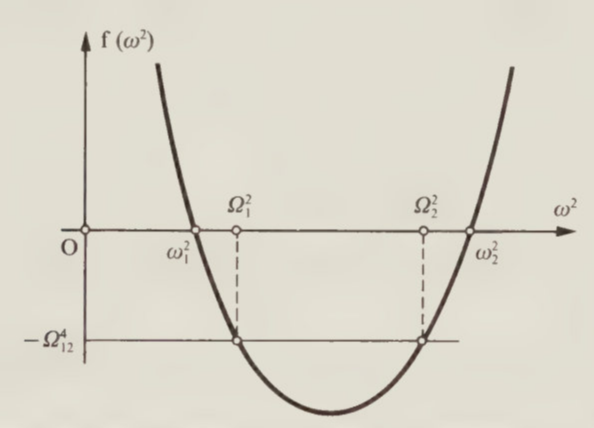


Fig. 8.6 Valeurs relatives des pulsations propres et des pulsations de couplage à zéro.

Une autre représentation géométrique peut être proposée; elle est inspirée des cercles de Mohr utilisés pour l'étude de l'état de contrainte. Pour cela, calculons les racines de l'équation (8.26)

$$\omega^4 - \omega^2(\Omega_1^2+\Omega_2^2) + \Omega_1^2\,\Omega_2^2 - \Omega_{12}^4 = 0$$

Il vient ainsi

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\Omega_1^2+\Omega_2^2) \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega_2^2-\Omega_1^2}{2}\right)^2 + \Omega_{12}^4} = \frac{1}{2}(\Omega_1^2+\Omega_2^2) \pm R \tag{8.28}$$

Les fréquences propres ω_1^2 et ω_2^2 correspondent aux extrémités du diamètre horizontal d'un cercle du plan ω^2, Ω_{12}^2 (fig. 8.7).

Cette représentation permet de se rendre compte immédiatement de l'influence du couplage sur l'écartement des pulsations propres.

Quand le terme de couplage $\Omega_{12}^2 = k_3/\sqrt{m_1\,m_2}$ est très grand, les fréquences propres sont nettement différenciées des pulsations Ω_1^2 et Ω_2^2. Il est facile de montrer qu'elles tendent respectivement vers les valeurs

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2} \qquad \omega_2^2 = k_3\,\frac{m_1 + m_2}{m_1\,m_2} \tag{8.29}$$

Si la rigidité k_3 tend vers l'infini, le système dégénère en un oscillateur élémentaire de masse $m = m_1 + m_2$, de rigidité $k = k_1 + k_2$, donc de pulsation propre ω_1^2 ci-dessus.

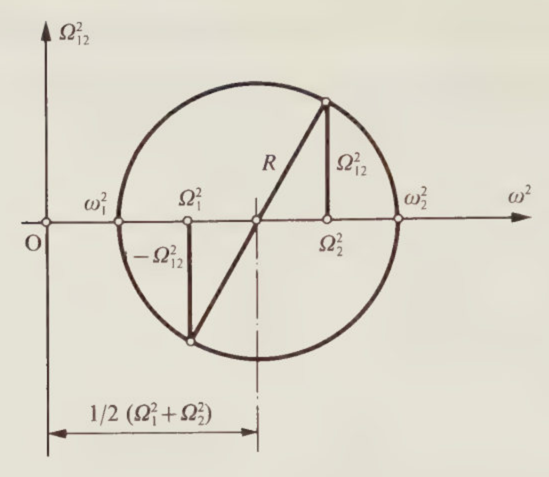


Fig. 8.7 Etude du couplage élastique; cercle des pulsations.

Le cercle des pulsations, dans le domaine des fréquences finies, dégénère en une droite verticale d'abscisse ω_1^2.

Par contre, si le couplage tend vers zéro, on a

$$\omega_1^2 \to \Omega_1^2 \to \frac{k_1}{m_1}$$ pulsation propre de la masse m_1 avec le seul ressort de rigidité k_1,

$$\omega_2^2 \to \Omega_2^2 \to \frac{k_2}{m_2}$$ pulsation propre de la masse m_2 avec le seul ressort de rigidité k_2.

Autrement dit, si $k_3 \to 0$, le système se transforme en deux systèmes élémentaires séparés.

8.4 EXEMPLES D'OSCILLATEURS À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

8.4.1 Fréquences propres d'un monte-charge

Le monte-charge représenté par la figure 8.8 comporte un groupe moteur-réducteur, un arbre de grande longueur en raison des conditions d'implantation, un tambour, un câble et une charge.

En négligeant les masses de l'arbre et du câble, en supposant que le tambour est indéformable et que le câble reste toujours tendu, calculer les fréquences propres et les fréquences de couplage à zéro en cas de blocage du palier P_1.

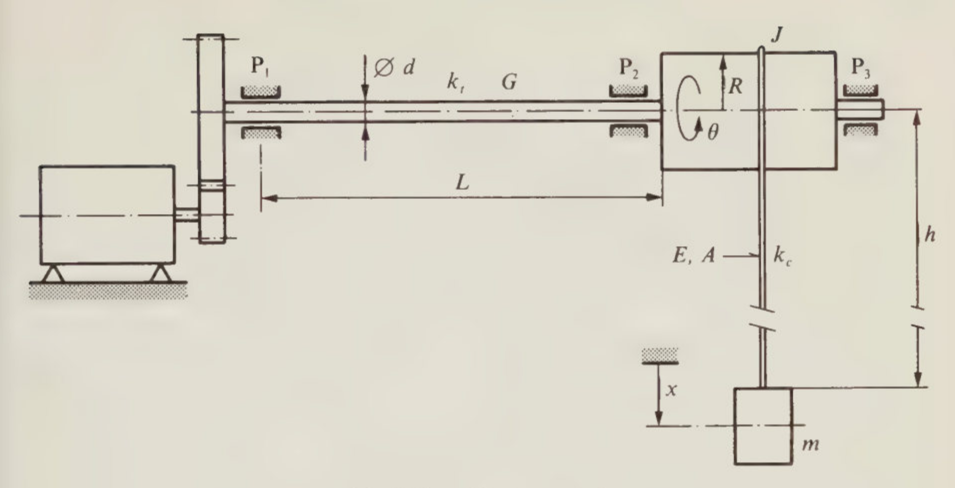


Fig. 8.8 Schéma d'un monte-charge.

Données du problème

Arbre	diamètre	$d = 50$ mm $= 5 \cdot 10^{-2}$ m
	longueur	$L = 3$ m
	module de glissement	$G = 0{,}8 \cdot 10^{11}$ N/m^2
Tambour	rayon	$R = 200$ mm $= 0{,}2$ m
	moment d'inertie	$J = 5$ kg $\cdot$ m^2
Câble	section	$A = 1$ cm^2 $= 10^{-4}$ m^2
	longueur lors du blocage	$h = 15$ m
	module d'élasticité	$E = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ N/m^2
Charge	masse	$m = 300$ kg

En supposant bloqué le palier P_1 et en prenant comme origines les positions d'équilibre statique, les oscillations du système peuvent être décrites par l'angle θ de rotation du tambour par rapport au palier P_1 et par le déplacement vertical x de la charge.

On définit les grandeurs

$$k_t = \frac{G\, I_p}{L} \quad \text{rigidité en torsion de l'arbre} \left(I_p = \frac{\pi\, d^4}{32} \right),$$

$k_c = \dfrac{E\,A}{h}$ rigidité en élongation du câble.

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} J\,\ddot{\theta} = -\,k_t\,\theta - R\,k_c\,(R\theta - x) \\ m\,\ddot{x} = -\,k_c\,(x - R\theta) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} J\,\ddot{\theta} + (k_t + R^2\,k_c)\,\theta - R\,k_c\,x = 0 \\ m\,\ddot{x} + k_c\,x - R\,k_c\,\theta = 0 \end{cases} \tag{8.30}$$

En cherchant des solutions de la forme

$\theta = A_1\,\mathrm{e}^{pt} = A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad x = A_2\,\mathrm{e}^{pt} = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

on obtient l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} (k_t + R^2\,k_c - J\,\omega^2) & -R\,k_c \\ -R\,k_c & (k_c - m\,\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

d'où, après développement

$$\left(\frac{k_c}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k_t + R^2\,k_c}{J} - \omega^2\right) - \frac{R^2\,k_c^2}{J\,m} = 0 \tag{8.31}$$

Il est commode d'introduire les pulsations de couplage à zéro et le terme de couplage définis à la section 8.3

$$\Omega_1^2 = \frac{k_c}{m} \qquad \Omega_2^2 = \frac{k_t + R^2\,k_c}{J} \qquad \Omega_{12}^4 = \frac{R^2\,k_c^2}{J\,m} \tag{8.32}$$

L'équation (8.31) devient ainsi

$$(\Omega_1^2 - \omega^2)\,(\Omega_2^2 - \omega^2) - \Omega_{12}^4 = 0$$

On en déduit les pulsations propres par (8.28)

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2}\right)^2 + \Omega_{12}^4} \tag{8.33}$$

Application numérique

On calcule d'abord les rigidités

$k_t = 16\,400$ Nm $\qquad k_c = 1{,}33 \cdot 10^6$ N/m

Il vient ensuite, d'après (8.32)

$\Omega_1^2 = 4\,400\ 1/\mathrm{s}^2 \qquad \Omega_2^2 = 13\,900\ 1/\mathrm{s}^2 \qquad \Omega_{12}^4 = (6\,890)^2\ 1/\mathrm{s}^4$

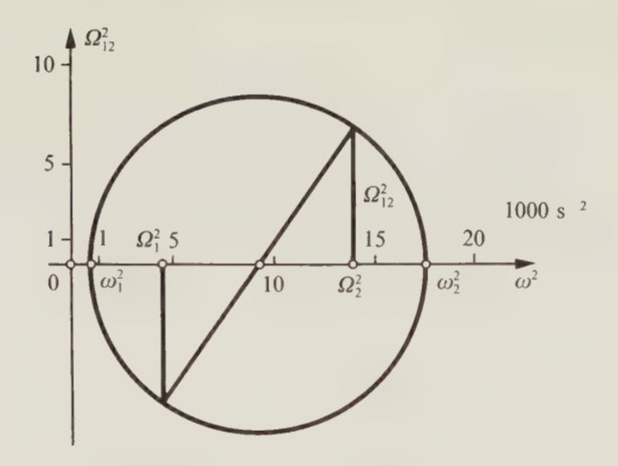


Fig. 8.9 Cercle des pulsations de l'exemple 8.4.1.

On peut ainsi tracer le cercle des pulsations de la figure 8.9.

Les solutions de l'équation (8.33) ont pour valeurs

$\omega_1^2 = 830\ 1/s^2 \qquad \omega_2^2 = 17\,600\ 1/s^2$

En résumé, on obtient les résultats suivants:

• pulsations et fréquences propres	$\omega_1 = 28{,}8\ 1/s$	$f_1 = 4{,}6$ Hz
	$\omega_2 = 132{,}5\ 1/s$	$f_2 = 21{,}1$ Hz
• pulsations et fréquences de couplage à zéro	$\Omega_1 = 66{,}7\ 1/s$	$F_1 = 10{,}6$ Hz
	$\Omega_2 = 118{,}1\ 1/s$	$F_2 = 18{,}8$ Hz

Commentaire

Dans le cas particulier choisi, l'arbre est long (3 m), alors que le câble est relativement court (15 m). Ainsi, les fréquences f_1 et f_2 sont assez proches l'une de l'autre. Par contre, si l'arbre était court (par exemple 0,5 m) et si le câble était long (par exemple 100 m), la fréquence f_1 serait beaucoup plus faible que f_2. Le système ne présenterait alors plus de différence significative avec l'oscillateur élémentaire constitué du câble et de la charge seuls.

8.4.2 Battements en régime libre

Un système à deux degrés de liberté peut présenter, en régime libre, un phénomène de battement analogue à celui, examiné au paragraphe 5.3.1, d'un oscillateur élémentaire soumis à deux forces harmoniques.

Revenons aux relations (8.13)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \tag{8.34}$$

On adopte les notations

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \qquad \psi = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \tag{8.35}$$

En procédant comme précédemment, on trouve facilement

$$\begin{cases} x_1 = (X_1 + X_2)\cos(\omega t - \varphi)\cdot\cos(at - \psi) \\ \qquad -(X_1 - X_2)\sin(\omega t - \varphi)\cdot\sin(at - \psi) \\ x_2 = (\beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2)\cos(\omega t - \varphi)\cdot\cos(at - \psi) \\ \qquad -(\beta_{21} X_1 - \beta_{22} X_2)\sin(\omega t - \varphi)\cdot\sin(at - \psi) \end{cases} \tag{8.36}$$

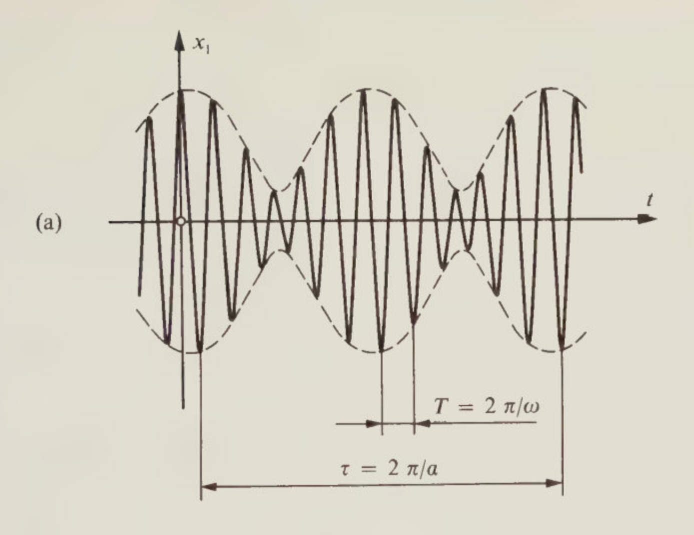
Le déplacement x_1 oscille à la pulsation ω dans une enveloppe oscillant elle-même, à la pulsation a, entre les amplitudes extrêmes $(X_1 + X_2)$ et $(X_1 - X_2)$. Le déplacement x_2 fait de même entre les amplitudes $(\beta_{21} X_1 + \beta_{22} X_2)$ et $(\beta_{21} X_1 - \beta_{22} X_2)$. Ce phénomène de battement, que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{cases} x_1 = G_1(at)\cdot\cos\big(\omega t - \varphi - \gamma_1(at)\big) \\ x_2 = G_2(at)\cdot\cos\big(\omega t - \varphi - \gamma_2(at)\big) \end{cases} \tag{8.37}$$

est représenté dans deux cas particuliers à la figure 8.10.

Commentaires

- Une partie de l'énergie du système est échangée alternativement entre les variables x_1 et x_2, alors que chaque mode conserve sa propre énergie.
- Pour un système symétrique, celui des figures 8.2 à 8.4 par exemple, les cœfficients β_1 et β_2 valent respectivement 1 et -1. Si l'on choisit les conditions initiales telles que $X_1 = X_2$, les déplacements x_1 et x_2 passent par des valeurs nulles, à vitesse nulle, à chaque demi-période $\tau/2 = \pi/a$ (voir fig. 5.3, cas (b), page 75).



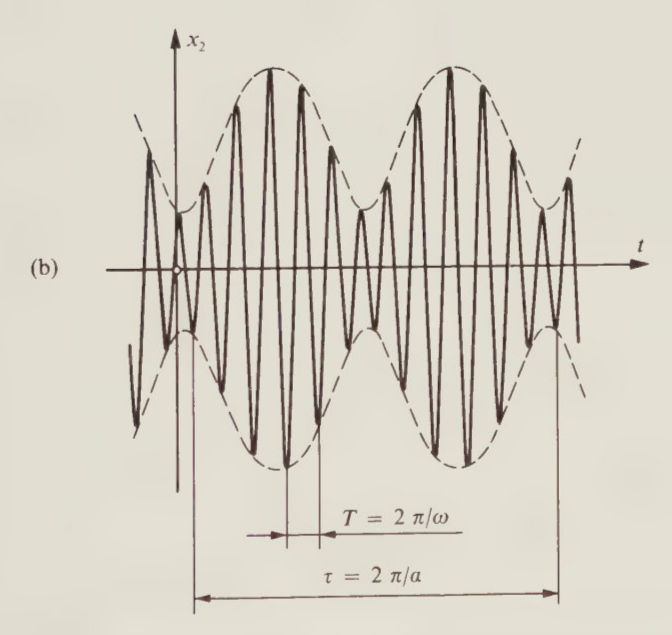


Fig. 8.10 Battements en régime libre d'un système à deux degrés de liberté.

(a)	$\omega_1 = 60$ 1/s	$X_1 = 0{,}6$	$\beta_{21} = 1{,}6$	$\varphi_1 = 0{,}5$
(b)	$\omega_1 = 50$ 1/s	$X_2 = 0{,}4$	$\beta_{22} = -1{,}4$	$\varphi_2 = 0{,}2$

CHAPITRE 9

L'AMORTISSEUR DE FRAHM

9.1 DÉFINITION ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SYSTÈME

On désigne sous le nom d'*amortisseur de Frahm* un dispositif permettant d'atténuer, sur une gamme de fréquences déterminée, les vibrations d'un système mécanique. Il est constitué d'un système oscillant, dit auxiliaire, dissipatif ou non, que l'on adjoint au système principal, augmentant ainsi le nombre de degrés de liberté et donc le nombre de résonances de l'ensemble. L'atténuation des vibrations du système principal est obtenue par transfert de celles-ci sur le système auxiliaire aux fréquences désirées.

On le rencontre en pratique sous des formes très variées. La figure 9.1 en représente le schéma de principe dans le cas le plus simple; l'oscillateur principal m_1, k_1 est dépourvu d'amortissement propre et l'oscillateur secondaire ne comporte qu'une seule masse m_2. Le système complet possède donc deux degrés de liberté. Nous allons étudier, d'après [3], le régime permanent provoqué par une force harmonique $F \cos \omega t$ appliquée sur la masse principale.

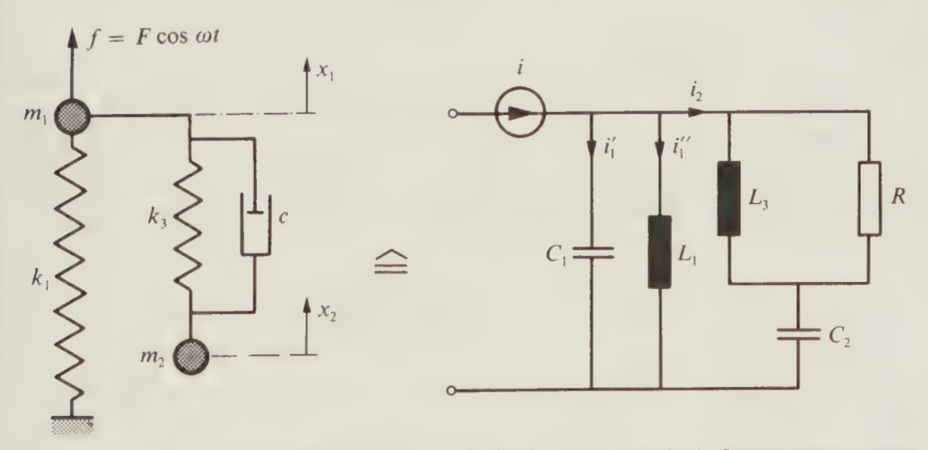


Fig. 9.1 Schéma de principe d'un amortisseur de Frahm avec l'analogie force-courant correspondante.

Les équations de Newton du système s'écrivent

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) + c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 \qquad\qquad + k_3 (x_2 - x_1) + c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

9.2 RÉGIME PERMANENT HARMONIQUE

Comme nous le montrerons plus tard dans le cas de l'oscillateur généralisé, les déplacements x_1 et x_2 en régime permanent sont des fonctions harmoniques de même pulsation ω que la force excitatrice. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \end{cases}$$

Le plus simple est alors de rechercher les déplacements complexes $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ dont x_1 et x_2 sont les parties réelles.

On obtient

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = X_1 \, e^{j(\omega t - \varphi_1)} = X_1 \, e^{-j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_1 \, e^{j\omega t} \\ \underline{x}_2 = X_2 \, e^{j(\omega t - \varphi_2)} = X_2 \, e^{-j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_2 \, e^{j\omega t} \end{cases} \tag{9.2}$$

De même, la force extérieure est la partie réelle de la force complexe $\underline{f} = F \, e^{j\omega t}$. Les équations (9.1) deviennent ainsi

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1 \underline{A}_1 + k_1 \underline{A}_1 + k_3 (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) + j\omega c (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) = F \\ -\omega^2 m_2 \underline{A}_2 + k_3 (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) + j\omega c (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \underline{A}_1 (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_3 + j\omega c) - \underline{A}_2 (k_3 + j\omega c) = F \\ -\underline{A}_1 (k_3 + j\omega c) + \underline{A}_2 (-\omega^2 m_2 + k_3 + j\omega c) = 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

Ces équations permettent de déterminer les nombres complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ et, par conséquent, les amplitudes X_1 et X_2 ainsi que les déphasages φ_1 et φ_2. Seule nous intéresse l'amplitude du mouvement de la masse principale. Calculons donc $\underline{A}_1$

$$\underline{A}_1 = F \frac{(k_3 - \omega^2 m_2) + j\omega c}{\big((k_1 - \omega^2 m_1)(k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_3\big) + j\omega c (k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)} \tag{9.4}$$

C'est un nombre complexe de la forme

$$\underline{A}_1 = F \frac{a + j\,b}{c + j\,d} = F \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \, e^{j\alpha}}{\sqrt{c^2 + d^2} \, e^{j\beta}}$$

Comme le montre la première équation (9.2), le module de $\underline{A}_1$ est égal à l'amplitude X_1. On a donc

$$\left(\frac{X_1}{F}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

soit, d'après (9.4)

$$\left(\frac{X_1}{F}\right)^2 = \frac{(k_3 - \omega^2 m_2)^2 + \omega^2 c^2}{\left((k_1 - \omega^2 m_1)(k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_3\right)^2 + \omega^2 c^2 (k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)^2} \tag{9.5}$$

Nous allons entreprendre l'étude de cette fonction par étapes successives. La masse et la rigidité de l'oscillateur principal étant fixées, il s'agit de mettre en évidence le rôle de la pulsation d'excitation ω et des paramètres ajustables m_2, k_3, c. On adopte les notations suivantes:

$\varepsilon = \dfrac{m_2}{m_1}$ rapport entre la masse de l'amortisseur et la masse principale,

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$ pulsation propre de l'oscillateur principal isolé,

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_3}{m_2}}$ pulsation propre de l'oscillateur secondaire non amorti isolé,

$a = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ rapport entre les pulsations propres,

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_1}$ rapport entre la pulsation forcée et la pulsation propre de l'oscillateur principal,

$\eta = \dfrac{c}{2\, m_2\, \omega_1}$ amortissement relatif «croisé»,

$X_{1s} = \dfrac{F}{k_1}$ déplacement statique de la masse principale,

$\mu = \dfrac{X_1}{X_{1s}}$ facteur d'amplification dynamique du mouvement de la masse principale.

Avec ces notations, et après les réductions nécessaires, la relation (9.5) devient

$$\mu^2 = \frac{4\,\eta^2 \beta^2 + (\beta^2 - a^2)^2}{4\,\eta^2 \beta^2 \left(\beta^2 (1+\varepsilon) - 1\right)^2 + \left(\varepsilon\, a^2 \beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - a^2)\right)^2} \tag{9.6}$$

Examinons d'abord comment se comporte le facteur d'amplification μ en fonction de la pulsation relative β et ceci pour les valeurs suivantes des paramètres

- $a = 1$ la pulsation propre de l'amortisseur est égale à celle de l'oscillateur principal (nous verrons plus loin que la valeur optimale de a est légèrement inférieure),

- $\varepsilon = 0{,}05$ la masse de l'oscillateur est 20 fois plus faible que celle du système principal,
- $\eta = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ \infty$.

On obtient ainsi les courbes de la figure 9.2 qui passent toutes par deux points P et Q, indépendants du facteur d'amortissement. L'existence de ces points sera démontrée par la suite.

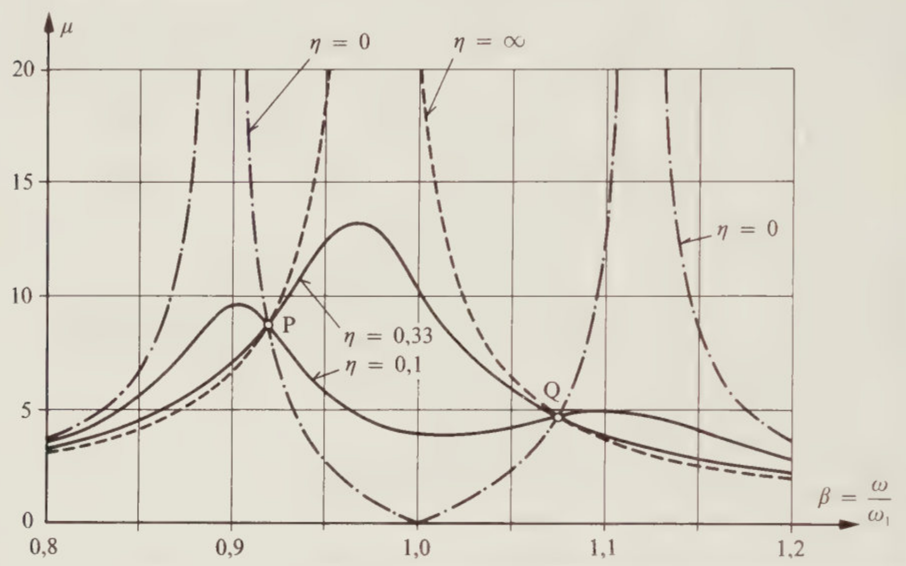


Fig. 9.2 Amortisseur de Frahm. Facteur d'amplification dynamique en fonction de la pulsation relative.

9.3 CAS LIMITES DE L'AMORTISSEMENT

En conservant les valeurs $a = 1$ et $\varepsilon = 0{,}05$, examinons plus en détail les deux cas limites $\eta = 0$ et $\eta = \infty$.

Quand l'***oscillateur secondaire n'est pas amorti***, le facteur d'amplification prend la forme simple, en valeur absolue,

$$\mu = \left| \frac{\beta^2 - 1}{0{,}05\,\beta^2 - (\beta^2 - 1)^2} \right| \tag{9.7}$$

Il devient infini pour les valeurs de β qui annulent le dénominateur (β' et β'' sur la fig. 9.3). A l'opposé, pour $\beta = 1$, $\mu = 0$ et la masse principale reste immobile alors que toute la force est absorbée par l'oscillateur secondaire. Cette circonstance particulière apparaît clairement sur le schéma électrique; si la résistance R devient infinie ($c = 0 \Rightarrow R = \infty$) et que le circuit secondaire L_3, C_2 est accordé, le circuit principal est court-circuité, ce qui implique $i_1' = i_1'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

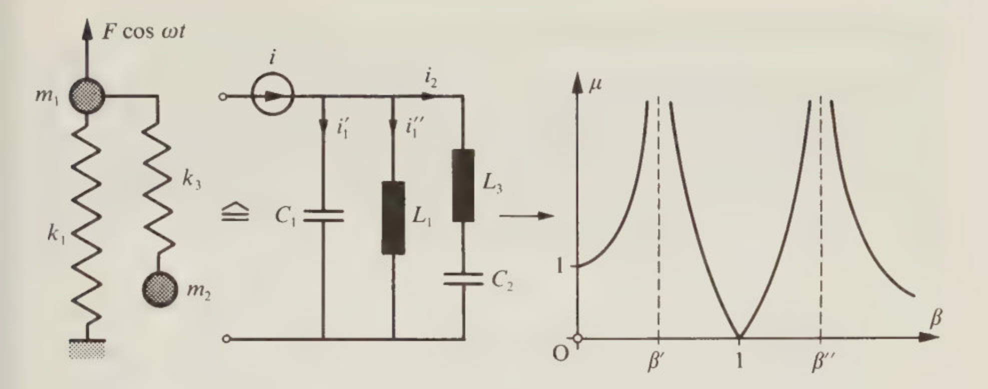


Fig. 9.3 Amortisseur de Frahm et facteur d'amplification dans le cas $\eta=0$, $a=1$ et $\varepsilon=0{,}05$.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser à première vue, le cas $\eta=0$ n'est généralement pas favorable en pratique, même s'il s'agit d'une machine dont le régime permanent correspond à $\beta=1 \Rightarrow \omega=\omega_1=\omega_2$. En effet, lors des phases d'accélération ou de décélération de la machine, on passe inévitablement par des amplitudes très grandes au voisinage de la pulsation $\omega'=\beta'\ \omega_1$. D'autre part, si $\eta=0$ et $\beta=1$, les amplitudes de la masse secondaire, que nous n'avons pas calculées ici, peuvent devenir excessives.

Si la ***résistance c est infinie,*** les masses m_1 et m_2 sont liées rigidement et le système dégénère en un oscillateur élémentaire non amorti dont la masse est égale à $m_1\,(1+\varepsilon)$. Dans le schéma électrique (fig. 9.4), les capacités C_1 et C_2 sont en parallèle car $c=\infty$ $\Rightarrow R=0$.

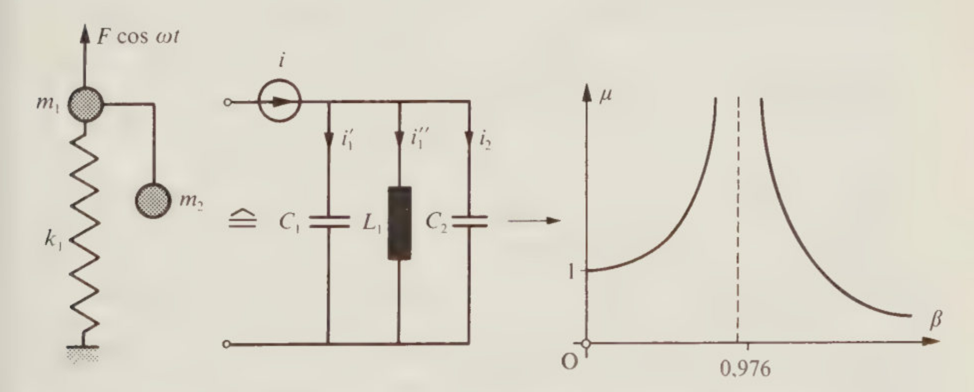


Fig. 9.4 Amortisseur de Frahm et facteur d'amplification dans le cas $\eta=\infty$, $a=1$ et $\varepsilon=0{,}05$.

Le facteur d'amplification devient, d'après (9.6),

$$\mu = \frac{1}{|\,\beta^2\,(1+0{,}05)\;-\;1\,|} \tag{9.8}$$

Il est infini pour $\beta = 1/\sqrt{1{,}05} = 0{,}976$.

En résumé, le coefficient μ peut devenir infini dans les deux cas limites $\eta = 0$ et $\eta = \infty$. Le but principal du système amortisseur est en général de limiter le mouvement de la masse principale m_1 pour une plage de fréquences aussi large que possible. C'est ce que nous admettrons pour la suite de cette étude et nous dirons, quand cette condition est remplie, que *l'amortisseur est optimal*. Bien entendu, l'optimisation pourrait être menée sur la base d'autres critères.

9.4 OPTIMISATION DE L'AMORTISSEUR DE FRAHM

Revenons à la figure 9.2. Les paramètres a et ε ayant une valeur constante (respectivement 1 et 0,05), les points P et Q ont une position fixe, comme nous l'avons déjà signalé. Dès lors, la valeur de η la plus favorable que l'on pourrait choisir dans un tel cas est celle qui correspond à une courbe $\mu(\beta)$ ayant une tangente horizontale au point le plus élevé, soit le point P. Cependant, on peut faire mieux en abaissant le point P. En effet, on vérifie facilement que si le rapport a des pulsations propres varie, les points P et Q se déplacent sur la courbe $\eta = 0$. Comme l'un monte si l'autre descend, la situation optimale est atteinte quand ils se trouvent à la même hauteur. On choisira alors une courbe $\mu(\eta)$ passant par l'un d'eux avec une tangente horizontale.

A partir de la relation (9.6), montrons maintenant qu'il existe effectivement deux valeurs de β pour lesquelles μ est indépendant de η. On peut écrire

$$\mu^2 = \frac{A\,\eta^2 + B}{C\,\eta^2 + D}$$

Pour que μ soit indépendant de η, il faut que $A/C = B/D$, ce qui entraîne

$$\frac{1}{(\beta^2\,(1+\varepsilon) - 1)^2} = \frac{(\beta^2 - a^2)^2}{(\varepsilon\, a^2\,\beta^2 - (\beta^2-1)\,(\beta^2-a^2))^2}$$

soit

$$\varepsilon\, a^2\,\beta^2 - (\beta^2-1)\,(\beta^2-a^2) = \pm\,(\beta^2-a^2)\,(\beta^2\,(1+\varepsilon) - 1)$$

Avec le signe $-$, cette condition devient

$$\varepsilon\,\beta^2\cdot\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

Ce résultat signifie que toutes les courbes tendent vers le point $\mu = 1$ pour $\beta \rightarrow 0$. Il ne s'agit pas des points P et Q cherchés.

Avec le signe $+$, la condition s'écrit

$$\beta^4\,(2+\varepsilon) - \beta^2\,(2 + 2\,a^2\,(1+\varepsilon)) + 2\,a^2 = 0$$

ou encore

$$\beta^4 - 2\,\beta^2\,\frac{1 + a^2\,(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon} + \frac{2\,a^2}{2+\varepsilon} = 0 \qquad (9.9)$$

C'est une équation bicarrée dont les deux racines positives β_1 et β_2, fonctions de a et ε, correspondent aux points P et Q.

Nous désirons donc que le facteur d'amplification ait même valeur pour les points P et Q, $\mu(P)=\mu(Q)$. Il est inutile d'introduire β_1^2 puis β_2^2 dans l'équation (9.6) car nous savons qu'aux points P et Q la valeur de μ est indépendante du facteur d'amortissement η. On peut donc choisir η de façon que l'équation se simplifie au maximum. C'est le cas pour $\eta=\infty$ et (9.6) devient

$$\mu = \frac{1}{|1-\beta^2(1+\varepsilon)|} \tag{9.10}$$

Comme P est du côté $\mu>0$ et Q du côté $\mu<0$, il faut écrire

$$\mu(\beta_1^2) = -\mu(\beta_2^2)$$

$$\frac{1}{1-\beta_1^2(1+\varepsilon)} = \frac{-1}{1-\beta_2^2(1+\varepsilon)}$$

$$1-\beta_1^2(1+\varepsilon) = -1+\beta_2^2(1+\varepsilon)$$

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{2}{1+\varepsilon} \tag{9.11}$$

Calculons la somme des racines de l'équation (9.9)

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = 2\,\frac{1+a^2(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon} \tag{9.12}$$

D'où, en égalant (9.11) et (9.12),

$$\frac{2}{1+\varepsilon} = 2\,\frac{1+a^2(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon}$$

$$a^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}$$

Dans l'extraction de la racine, seul le signe + doit être considéré car le rapport $a=\omega_2/\omega_1$ est essentiellement positif

$$a = \frac{1}{1+\varepsilon} \tag{9.13}$$

Rappelons que pour cette valeur de a les points P et Q sont à même hauteur. On voit donc que la solution optimale est obtenue quand la pulsation propre de l'amortisseur est un peu inférieure (ε est petit) à celle du système principal.

Il faut encore déterminer la valeur de μ qu'on obtient quand la condition (9.13) est remplie. Pour cela, considérons les deux courbes ayant une tangente horizontale,

respectivement au point P et au point Q (fig. 9.5). Entre ces points, on peut les assimiler sans grande erreur à une horizontale. Dès lors, on reporte les racines de l'équation (9.9) dans la relation (9.10).

Calculons d'abord les racines de (9.9) quand la condition (9.13) est remplie.

$$\beta^4 - 2\,\beta^2 \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{2}{(2+\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^2} = 0$$

$$\beta^2 = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\right)$$

Introduisons ces valeurs dans (9.10)

$$\mu = \frac{1}{1-\left(1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\right)} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}} \tag{9.14}$$

9.5 EXEMPLES D'APPLICATION

On considère d'abord un amortisseur optimal pour lequel $\varepsilon = 1/4$. La valeur optimale de a est, par (9.13),

$$a = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Les abscisses des points P et Q ont pour valeur

$$\beta^2 = \frac{1}{1+0{,}25}\left(1 \pm \sqrt{\frac{0{,}25}{2+0{,}25}}\right), \text{ soit}$$

$$\beta_1 = 0{,}730 \qquad \beta_2 = 1{,}033$$

La figure 9.5 représente les courbes limites $\eta = 0$ et $\eta = \infty$ dans ce cas particulier, ainsi que les deux courbes ayant respectivement une tangente horizontale en P et Q.

D'après (9.14), le coefficient d'amplification a pour valeur

$$\mu = \sqrt{\frac{2+0{,}25}{0{,}25}} = 3$$

Comparons ce résultat avec le cas d'un amortisseur pour lequel $\omega_2 = \omega_1$, donc $a = 1$.

L'équation (9.9) devient alors

$$\beta^4 - 2\,\beta^2 + \frac{2}{2+\varepsilon} = 0$$

d'où

$$\beta^2 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{2+\varepsilon}} = 1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$$

Dans tous les cas pratiques, μ est le plus grand pour la plus petite valeur de β. Prenons donc

$$\beta^2 = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}} \tag{9.15}$$

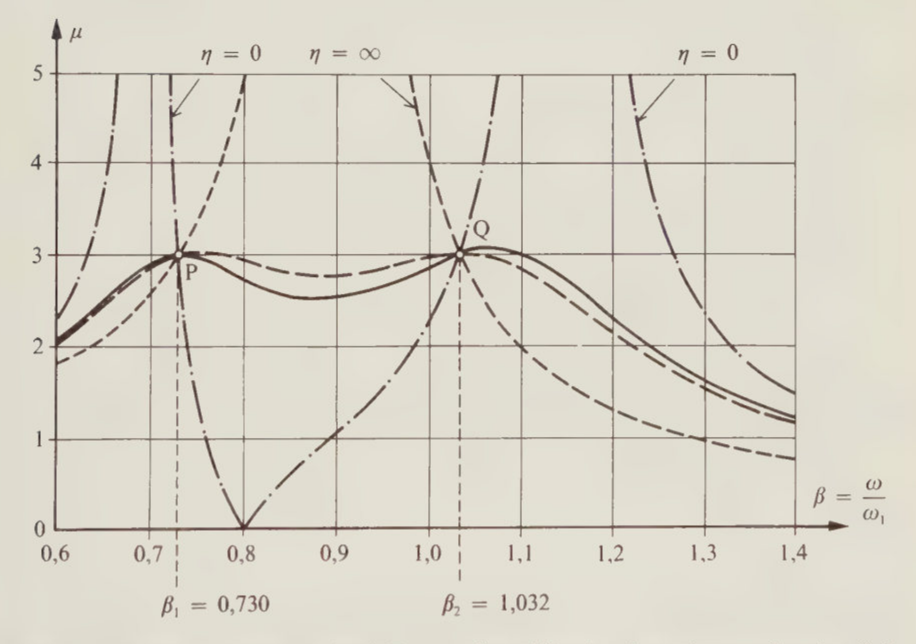


Fig. 9.5 Amortisseur de Frahm optimal. Facteur d'amplification dynamique en fonction de la pulsation relative.

et introduisons cette valeur dans (9.10) pour calculer μ

$$\mu = \frac{1}{\left| -\varepsilon + (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}} \right|} \tag{9.16}$$

Dans le cas particulier considéré ($\varepsilon = 1/4$), μ devient

$$\mu = \frac{1}{-0{,}25 + 1{,}25\sqrt{\dfrac{0{,}25}{2{,}25}}} = 6$$

soit le double de la valeur obtenue dans le cas optimal.

Nous allons calculer le facteur d'amortissement correspondant à la courbe de la figure 9.5 ayant une tangente horizontale au point P.

Revenons à la relation (9.6) donnant le carré du facteur d'amplification dynamique

$$\mu^2 = \frac{N}{D} = \frac{4\,\eta^2\,\beta^2 + (\beta^2 - a^2)^2}{4\,\eta^2\,\beta^2\,(\beta^2\,(1+\varepsilon) - 1)^2 + (\varepsilon\,a^2\,\beta^2 - (\beta^2 - 1)\,(\beta^2 - a^2))^2}$$

Il s'agit de déterminer η de manière que la dérivée $\partial\mu/\partial\beta$ soit nulle pour $\beta = \beta_1$, ce qui est équivalent à la condition suivante, beaucoup plus simple à exprimer

$$\left(\frac{\partial\mu^2}{\partial\beta^2}\right)_{\beta_1^2} = 0$$

On a d'abord

$$\frac{\partial\mu^2}{\partial\beta^2} = \frac{1}{D^2}\left(D\,\frac{\partial N}{\partial\beta^2} - N\,\frac{\partial D}{\partial\beta^2}\right) = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial N}{\partial\beta^2} - \frac{N}{D}\,\frac{\partial D}{\partial\beta^2}\right) = 0$$

La condition à satisfaire est ainsi, avec $N/D = \mu^2(P) = \lambda$,

$$\frac{\partial N}{\partial\beta^2} - \lambda\,\frac{\partial D}{\partial\beta^2} = 0 \tag{9.17}$$

Les dérivations donnent

$$\frac{\partial N}{\partial\beta^2} = 4\,\eta^2 + 2\,(\beta^2 - a^2) \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial\beta^2} = {} & 4\,\eta^2\,(\beta^2\,(1+\varepsilon) - 1)^2 + 8\,\eta^2\,\beta^2\,(\beta^2\,(1+\varepsilon) - 1)\,(1+\varepsilon) + \\ & + 2\,(\varepsilon\,a^2\,\beta^2 - (\beta^2-1)\,(\beta^2-a^2))\,(\varepsilon\,a^2 - (\beta^2-a^2) - (\beta^2-1))\end{aligned} \tag{9.19}$$

Avec $\lambda = 9$, $\varepsilon = 0{,}25$, $\beta^2 = 0{,}533$ et compte tenu de (9.18) et (9.19), l'équation (9.17) se réduit à

$$\eta^2 - 0{,}04267 = 0 \;\Rightarrow\; \eta = 0{,}207$$

Ainsi, la courbe $\mu(\beta)$ possède une tangente horizontale au point P si $\eta = 0{,}207$. En procédant de la même manière, on montre que $\mu(\beta)$ a une tangente horizontale au point Q quand $\eta = 0{,}231$. Cela signifie qu'en pratique on peut choisir $0{,}21 \leqslant \eta \leqslant 0{,}23$.

9.6 AMORTISSEUR DE LANCHESTER

Envisageons enfin le cas de l'amortisseur de Lanchester dans lequel la masse secondaire et la masse principale ne sont liées que par un dash-pot, sans ressort (fig. 9.6).

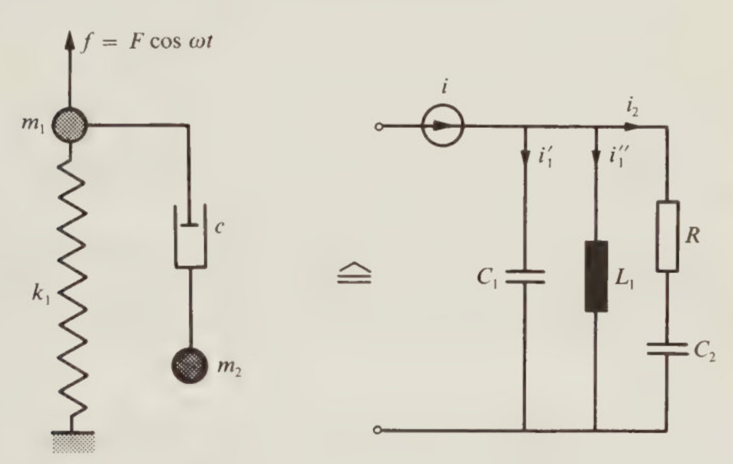


Fig. 9.6 Amortisseur de Lanchester.

Cela revient à dire que $k_3 = 0$, d'où $\omega_2 = 0$, $a = 0$ et l'équation (9.9) devient

$$\beta^4 - 2\,\beta^2 \frac{1}{2 + \varepsilon} = 0$$

La première solution $\beta_1^2 = 0$ signifie que le point P coïncide avec le point commun de toutes les courbes, de coordonnées $\beta = 0$ et $\mu = 1$ (fig. 9.7). La deuxième solution a pour valeur

$$\beta_2^2 = \frac{2}{2+\varepsilon} \Rightarrow \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{2+\varepsilon}} \tag{9.20}$$

Elle donne l'abscisse du point Q pour lequel le facteur d'amplification devient, par introduction dans (9.10),

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \frac{2}{2 + \varepsilon}(1+\varepsilon) \right|} = 1 + \frac{2}{\varepsilon} \tag{9.21}$$

Toujours dans le cas particulier $\varepsilon = 1/4$, il vient $\mu = 9$, soit une valeur triple de celle de l'amortisseur optimum.

En général, l'amortisseur de Lanchester n'est pas réalisé avec une résistance visqueuse, mais avec une résistance à frottement sec (de Coulomb). Le problème se

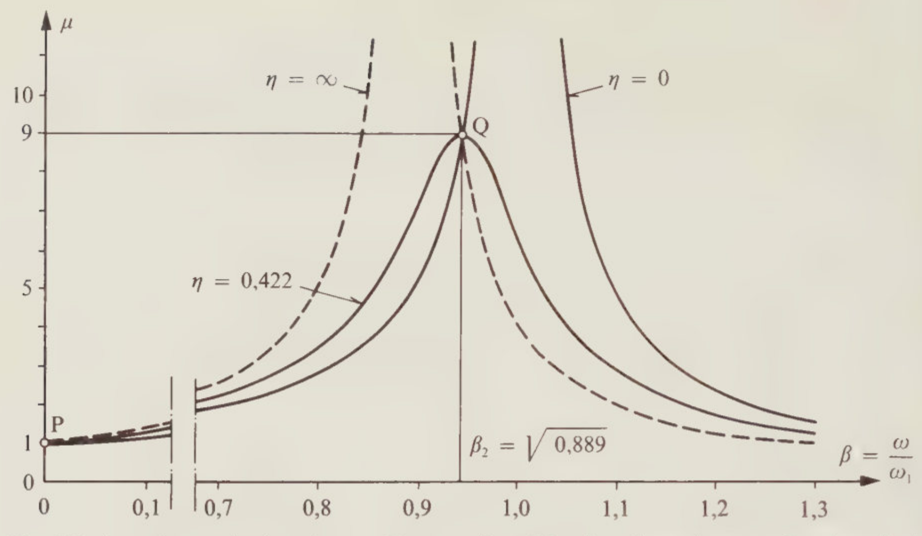


Fig. 9.7 Amortisseur de Lanchester. Facteur d'amplification dynamique en fonction de la pulsation relative.

complique alors considérablement et l'on peut montrer que le coefficient d'amplification maximum a la valeur approximative

$$\mu = \frac{\pi^2}{4\,\varepsilon} \tag{9.22}$$

soit, dans le cas particulier envisagé,

$$\mu = \frac{\pi^2}{4 \times 0{,}25} = 9{,}87 \approx 10$$

Cette valeur est un peu moins favorable que celle trouvée pour l'amortisseur de Lanchester avec frottement visqueux (10 au lieu de 9).

CHAPITRE 10

LE CONCEPT D'OSCILLATEUR GÉNÉRALISÉ

10.1 DÉFINITION ET FORMES ÉNERGÉTIQUES DE L'OSCILLATEUR GÉNÉRALISÉ

On appelle *système oscillant linéaire général discret* – ou plus simplement *oscillateur généralisé* – un système de la mécanique linéaire comportant un nombre n quelconque, mais fini, de degrés de liberté et dont le comportement est régi par l'équation différentielle du second ordre suivante

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \tag{10.1}$$

Dans cette équation, $\boldsymbol{x}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$ et $\ddot{\boldsymbol{x}}$ sont respectivement, comme à la section 8.1, les vecteurs des déplacements, des vitesses et des accélérations. Quant au vecteur $\boldsymbol{f}(t)$, il représente les forces extérieures agissant sur le système.

Les composantes x_i du vecteur $\boldsymbol{x}$ sont appelées coordonnées généralisées car leurs dimensions physiques sont en général différentes (longueurs, angles, volumes, etc.). La même remarque s'applique aux dérivées $\dot{x}_i$ et $\ddot{x}_i$ ainsi qu'aux forces $f_i(t)$.

Les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$, que l'on suppose symétriques, sont appelées respectivement *matrice des masses, matrice d'amortissement* et *matrice de rigidité*.

Les problèmes de mécanique conduisant à une équation du type (10.1) sont très variés. Ils concernent le plus souvent l'étude des petits mouvements de systèmes appartenant à l'une des deux catégories ci-après:

- systèmes de solides considérés comme indéformables, soumis à des forces élastiques et des forces résistives linéaires (forces de résistance visqueuse);
- systèmes continus déformables discrétisés, c'est-à-dire remplacés de manière approchée, sur la base de méthodes numériques ou expérimentales, par des systèmes ne comportant qu'un nombre limité de degrés de liberté (poutres, plaques, coques, structures quelconques).

Le concept d'oscillateur généralisé, tel qu'on vient de le définir, implique que les formes énergétiques correspondantes soient données par les expressions ci-dessous.

L'*énergie cinétique* ne dépend que des vitesses généralisées et vaut

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}} \tag{10.2}$$

C'est une forme quadratique symétrique définie positive des vitesses généralisées; elle ne s'annule que pour $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$.

Par conséquent, la matrice $[M]$ est également symétrique définie positive. Cela signifie qu'elle satisfait le critère de Silvester; le déterminant de $[M]$ et les déterminants de tous les mineurs diagonaux doivent être positifs.

$$\Delta_n = |M| = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n-1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ m_{n-1,1} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0 \, , \dots$$

$$\dots, \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad \Delta_1 = m_{11} > 0$$

L'*énergie potentielle*, de type élastique, a pour expression

$$V = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{x}^T [K]\, \boldsymbol{x} \tag{10.3}$$

Il s'agit d'une forme quadratique symétrique semi-définie positive des déplacements généralisés. Elle est dite semi-définie car elle peut éventuellement être nulle pour une valeur de $\boldsymbol{x}$ différente de zéro.

On appelle *fonction de dissipation de Rayleigh* la demi-puissance totale consommée par le système

$$W = \frac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{x}}^T [C]\, \dot{\boldsymbol{x}} \tag{10.4}$$

Cette fonction, introduite par Rayleigh, est une forme quadratique symétrique semi-définie positive des vitesses généralisées.

Nous allons maintenant montrer qu'en dérivant les relations (10.2) à (10.4) on retrouve effectivement l'équation différentielle (10.1).

10.2 DÉRIVATION D'UNE FORME QUADRATIQUE SYMÉTRIQUE · EQUATIONS DE LAGRANGE

Avant de poursuivre l'étude de l'oscillateur, il est nécessaire d'effectuer le calcul préparatoire suivant. On considère une forme quadratique symétrique des variables x_i

$$Q = \boldsymbol{x}^T [S]\, \boldsymbol{x} = \sum_i^n \sum_j^n s_{ij}\, x_i\, x_j \qquad s_{ij} = s_{ji} \tag{10.5}$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}$ et on exprime le résultat sous forme matricielle.

Si x_k est l'un des x_i, la forme quadratique peut s'écrire

$$Q = \underbrace{\sum_{i \neq k}^{n} s_{ik}\, x_i\, x_k}_{(n-1)\text{ termes}} + \underbrace{\sum_{j \neq k}^{n} s_{kj}\, x_k\, x_j}_{(n-1)\text{ termes}} + \underbrace{s_{kk}\, x_k^2}_{1\text{ terme}} + \underbrace{Q'}_{(n-1)^2\text{ termes}} \tag{10.6}$$

Dans cette expression, le terme Q' ne dépend pas de l'indice k. La dérivation donne ainsi

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = \sum_{i \neq k}^{n} s_{ik}\, x_i + \sum_{j \neq k}^{n} s_{kj}\, x_j + 2\, s_{kk}\, x_k = \sum_{i}^{n} s_{ik}\, x_i + \sum_{j}^{n} s_{kj}\, x_j$$

Comme $s_{ik} = s_{kj}$ si $i = j$, les deux sommes sont égales

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2 \sum_{i}^{n} s_{ik}\, x_i = 2 \sum_{j}^{n} s_{kj}\, x_j$$

En faisant varier l'indice k entre 1 et n, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= 2 \sum_{j}^{n} s_{1j}\, x_j \\ &\;\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} &= 2 \sum_{j}^{n} s_{nj}\, x_j \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = 2\, [S]\, \boldsymbol{x}$$

On peut définir l'opérateur matriciel

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{Bmatrix} \tag{10.7}$$

En résumé, si Q est une forme quadratique symétrique

$$\left\{\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\} = 2\, [S]\, \boldsymbol{x} \tag{10.8}$$

Si l'on désigne comme précédemment par T, V et W l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et la fonction de dissipation, les équations de Lagrange d'un système dissipatif à n degrés de liberté s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_k} = f_k(t) \qquad k = 1, \ldots, n \tag{10.9}$$

Elles sont au nombre de n mais peuvent être condensées en une équation unique en utilisant l'opérateur matriciel défini ci-dessus. Il vient ainsi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} - \left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t) \tag{10.10}$$

Dans le cas particulier de l'oscillateur généralisé, compte tenu des hypothèses faites au début de ce chapitre, l'énergie cinétique ne dépend pas des déplacements et l'équation précédente se simplifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t) \tag{10.11}$$

Rappelons que T, V et W ont pour valeurs

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$V = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}^T\,[K]\,\boldsymbol{x}$$

$$W = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[C]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$

En utilisant le résultat (10.8), l'équation (10.11) devient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t)$$

Comme les coefficients des matrices sont indépendants du temps, on peut effectuer la dérivation du premier terme

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$$

On retrouve ainsi, sous forme matricielle, l'équation de Newton du système. Il s'agit bien de l'équation (10.1).

10.3 EXAMEN DE CAS PARTICULIERS

10.3.1 Formes énergétiques de l'oscillateur à deux degrés de liberté

Le schéma canonique de l'oscillateur à deux degrés de liberté, représenté sur la figure 8.1, est reproduit ci-dessous par raison de commodité.

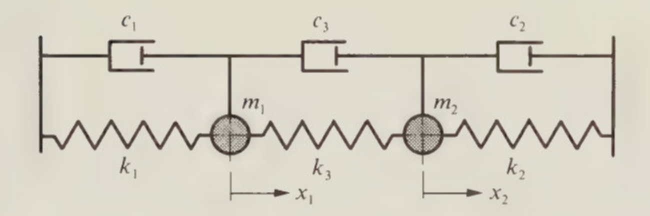


Fig. 10.1 Oscillateur à deux degrés de liberté.

L'énergie cinétique du système a pour valeur

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Soit, sous forme matricielle

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}_1 \; \dot{x}_2\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}}$$

On retrouve ainsi la relation (10.2).
Pour l'énergie potentielle, il vient successivement

$$V = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_3 (x_1 - x_2)^2 + k_2 x_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} ((k_1 + k_3) x_1^2 - 2 k_3 x_1 x_2 + (k_2 + k_3) x_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2} \{x_1 \; x_2\} \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T [K] \boldsymbol{x}$$

Il s'agit de la relation (10.3).
La force $c_1 \dot{x}_1$, due à la résistance c_1, dissipe une puissance $c_1 \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_1 = c_1 \dot{x}_1^2$. De même, les puissances dissipées dans c_3 et c_2 sont respectivement $c_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2$ et $c_2 \dot{x}_2^2$. La demi-somme de ces puissances représente la fonction de dissipation de Rayleigh.

$$W = \frac{1}{2} (c_1 \dot{x}_1^2 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_2 \dot{x}_2^2)$$

$$W = \frac{1}{2} ((c_1 + c_3) \dot{x}_1^2 - 2 c_3 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2^2)$$

$$W = \frac{1}{2}\{\dot{x}_1\ \dot{x}_2\}\begin{bmatrix} c_1+c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T[C]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$

La relation (10.4) est ainsi établie.

On constate que les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont symétriques et qu'elles ont bien les valeurs trouvées à partir des équations de Newton (8.4). D'autre part, on remarque que la structure de $[C]$ est la même que celle de $[K]$. Cette similitude n'est pas générale mais néanmoins fréquente. Par contre, la structure de $[M]$ est intrinsèquement différente.

10.3.2 Energie potentielle d'un système élastique linéaire

On considère un système élastique linéaire, soumis à n forces généralisées Q_1, ..., Q_n. Le point d'application A_i de la force Q_i se déplace en A_i' (fig. 10.2). Désignons par x_i la composante de A_iA_i' selon Q_i et par b_i la composante dans le plan orthogonal. La configuration déformée du système, à partir de la configuration initiale ($Q_i = 0$) est définie par l'ensemble des déplacements x_i, b_i.

Par hypothèse, les forces sont des fonctions linéaires des déplacements et l'on peut écrire

$$Q_i = \sum_j^n k_{ij}\, x_j \qquad (10.12)$$

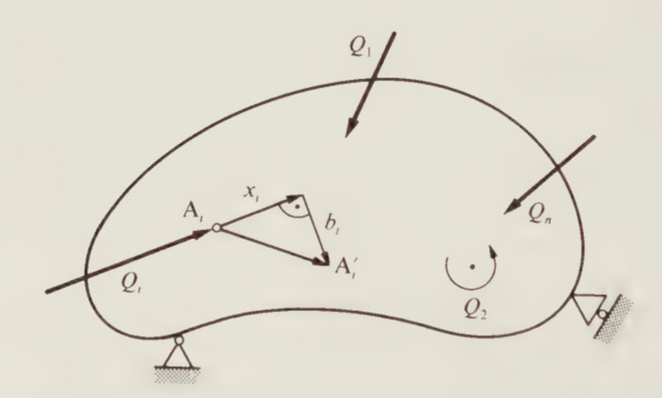


Fig. 10.2 Système élastique linéaire soumis à n forces Q_i.

On sait que les rigidités réciproques sont égales (théorème de Maxwell-Betti)

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad (10.13)$$

Le système étant linéaire, l'énergie potentielle de déformation est égale à la demi-somme des produits entre les forces et les déplacements dans leurs directions (formule de Clapeyron)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} Q_i \, x_i \tag{10.14}$$

En remplaçant les Q_i par leurs valeurs (10.12), V apparaît comme une forme quadratique symétrique des déplacements

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} k_{ij} \, x_i \, x_j \tag{10.15}$$

Ecrivons encore les résultats (10.12), (10.14) et (10.15) sous forme matricielle

$$\boldsymbol{Q} = [K] \, \boldsymbol{x} \tag{10.16}$$

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \tag{10.17}$$

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T [K] \, \boldsymbol{x}$$

En résumé, dans le cas particulier examiné, V est bien de la forme (10.3).

L'inversion de (10.16) permet de définir la *matrice* $[a]$ *des coefficients d'influence*, appelée également *matrice de flexibilité*, parfois plus facile à déterminer en pratique.

$$\boldsymbol{x} = [K]^{-1} \, \boldsymbol{Q} = [a] \, \boldsymbol{Q} \tag{10.18}$$

La matrice $[a]$ est symétrique puisque $[K]$ est symétrique. Quant à l'énergie potentielle, elle devient une forme quadratique symétrique des forces

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{Q}^T [a] \, \boldsymbol{Q} \tag{10.19}$$

10.3.3 Energie cinétique d'un système de masses ponctuelles

Il est facile de montrer, ce que nous allons faire ci-après, que l'énergie cinétique d'un système de masses ponctuelles est une forme quadratique symétrique définie positive des vitesses généralisées. Examinons donc un système de r masses ponctuelles m_a (fig. 10.3), reliées entre elles et aux plans d'un référentiel inertiel par des forces élastiques et des forces de frottement visqueux. On fait l'hypothèse que le système est soumis à ℓ liaisons holonômes, bilatérales et indépendantes du temps. Il possède donc $n = 3\,r - \ell$ degrés de liberté.

Soit Z_a^k $(k = 1,2,3)$ les coordonnées cartésiennes de la masse m_a dans le référentiel choisi. La vitesse de cette masse étant v_a, on peut écrire

$$v_a^2 = \sum_{k}^{3} (\dot{Z}_a^k)^2 \tag{10.20}$$

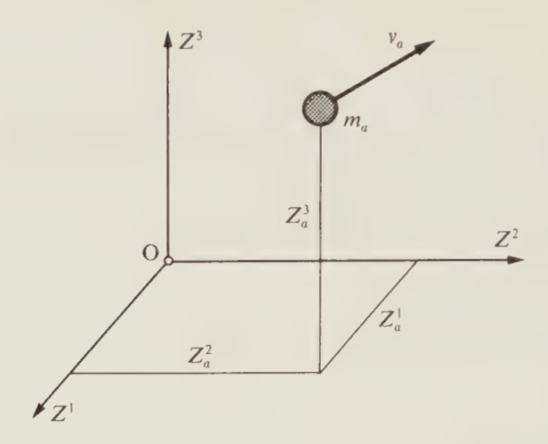


Fig. 10.3 Système de *r* masses ponctuelles.

L'énergie cinétique totale a pour valeur

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a}^{r} m_a \, v_a^2$$

soit, en utilisant la relation (10.20)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a}^{r}\sum_{k}^{3} m_a \, (\dot{Z}_a^k)^2 \tag{10.21}$$

La configuration du système peut être décrite par n coordonnées généralisées x_i ($i = 1, ..., n$). En raison de l'hypothèse admise sur la nature des liaisons, les coordonnées Z_a^k ne dépendent du temps que par l'intermédiaire des x_i. On a donc

$$Z_a^k = Z_a^k(x_1, \, ..., \, x_i, \, ..., \, x_n)$$

$$\mathrm{d}Z_a^k = \sum_{i}^{n} \frac{\partial Z_a^k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \quad \Rightarrow \quad \dot{Z}_a^k = \sum_{i}^{n} \frac{\partial Z_a^k}{\partial x_i}\,\dot{x}_i \tag{10.22}$$

Pour simplifier l'écriture, adoptons la convention

$$h_{ai}^k = \frac{\partial Z_a^k}{\partial x_i} \tag{10.23}$$

L'énergie cinétique devient ainsi

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a}^{r}\sum_{k}^{3} m_a \left(\sum_{i}^{n} h_{ai}^k \, \dot{x}_i\right)^2$$

En utilisant deux indices au lieu d'un seul, le carré de la dernière somme peut se mettre sous la forme

$$\left(\sum_{i}^{n} h_{ai}^{k}\,\dot{x}_i\right)^2 = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} h_{ai}^{k}\,h_{aj}^{k}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j$$

avec, naturellement, $h_{ai}^{k}=h_{aj}^{k}$ si $i=j$.
Il vient donc

$$T = \frac{1}{2}\sum_{a}^{r}\sum_{k}^{3} m_a \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} h_{ai}^{k}\,h_{aj}^{k}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} \dot{x}_i\,\dot{x}_j \sum_{a}^{r}\sum_{k}^{3} m_a\,h_{ai}^{k}\,h_{aj}^{k} \qquad (10.24)$$

On appelle *masses généralisées*, ou *coefficients d'inertie*, les quantités ainsi définies

$$m_{ij} = \sum_{a}^{r}\sum_{k}^{3} m_a\,h_{ai}^{k}\,h_{aj}^{k} \qquad (10.25)$$

Comme $h_{ai}^{k}=h_{aj}^{k}$ si $i=j$, les masses généralisées réciproques sont égales, $m_{ij} = m_{ji}$.

L'énergie cinétique devient finalement

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} m_{ij}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j \qquad (10.26)$$

Ecrit sous forme matricielle, ce résultat redonne bien la relation (10.2)

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$

CHAPITRE 11

RÉGIME LIBRE DE L'OSCILLATEUR GÉNÉRALISÉ CONSERVATIF

11.1 INTRODUCTION

Comme nous l'avions fait pour l'oscillateur élémentaire, nous allons d'abord supposer que l'oscillateur généralisé n'est soumis à aucune force extérieure et que l'amortissement est nul $\left(\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{0},\ [C]=[0]\right)$. Dans ces conditions, la solution du système différentiel est le régime libre conservatif.

La connaissance du régime libre conservatif, bien plus facile à établir que le régime libre dissipatif, est suffisante dans de nombreux problèmes de la pratique. Les fréquences propres, en particulier, ne sont que peu influencées par les amortissements (sauf pour des valeurs exceptionnellement élevées de ces derniers). Il en va autrement dans l'étude des régimes forcés pour lesquels, bien entendu, les amortissements jouent un rôle essentiel.

En régime libre conservatif, l'équation (10.1) devient

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.1)$$

Prémultiplions cette équation par $[M]^{-1}$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + [M]^{-1}\,[K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.2)$$

On appelle *noyau du système* le produit

$$[A] = [M]^{-1}\,[K] \qquad (11.3)$$

Avec cette notation, l'équation (11.2) s'écrit

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + [A]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.4)$$

Cette équation matricielle correspond à un système de n équations différentielles du second ordre qu'il est intéressant de résoudre par deux approches différentes,

- la combinaison linéaire de solutions particulières,
- un changement de base faisant intervenir les coordonnées normales (ou découplées).

11.2 RÉSOLUTION DU SYSTÈME PAR COMBINAISON LINÉAIRE DE SOLUTIONS PARTICULIÈRES

11.2.1 Recherche de solutions particulières

On recherche d'abord, dans la première façon d'aborder le problème, s'il existe des solutions $x_i(t)$ du système (11.4) régies, à un facteur près, par une même fonction du temps

$$x_i(t) = X_i \, g(t)$$

Sur le plan mathématique, il est facile de montrer que $g(t)$ doit être une fonction harmonique. La raison physique suivante suffit pour s'en convaincre:

- aucune énergie n'est plus fournie au système mécanique pour $t>0$;
- aucune énergie ne peut être dissipée par le système lui-même.

Ainsi l'énergie totale déterminée par les déplacements initiaux et les vitesses initiales se conserve indéfiniment.

On recherche donc, pour le vecteur des déplacements, une solution du type

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} \cos(\omega t - \varphi) \tag{11.5}$$

Il vient, par introduction dans (11.4)

$$\left[-\omega^2 \lceil I \rfloor + [A]\right] \boldsymbol{X} \cos(\omega t - \varphi) = \boldsymbol{0}$$

En adoptant la convention d'écriture

$$\delta = \omega^2 \tag{11.6}$$

on obtient, après simplification par $\cos(\omega t - \varphi)$,

$$\left[[A] - \delta \lceil I \rfloor\right] \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{11.7}$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui n'admet de solutions non toutes nulles que si son déterminant est nul

$$\left| [A] - \delta \lceil I \rfloor \right| = 0 \tag{11.8}$$

soit, en développant

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\delta) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\delta) & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\delta) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.9}$$

Les scalaires $\delta = \omega^2$ sont ainsi *les valeurs propres* de la matrice noyau $[A]$. L'équation précédente, appelée *équation aux pulsations propres* du système oscillant, ou *équation caractéristique*, est de la forme

$$\delta^n + a_1 \delta^{n-1} + a_2 \delta^{n-2} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n = 0 \tag{11.10}$$

Pour les raisons physiques énoncées précédemment, elle admet des solutions toutes positives (cette affirmation sera démontrée au paragraphe 11.3.3) que nous

supposons, de plus, toutes distinctes. En classant ces solutions par ordre croissant on peut écrire

$$\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_p < \ldots < \delta_n \tag{11.11}$$

soit, en revenant aux pulsations propres,

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_p < \ldots < \omega_n \tag{11.12}$$

Ces pulsations du système conservatif pourraient être désignées $\omega_{01}, \ldots, \omega_{0n}$ par analogie avec la pulsation ω_0 de l'oscillateur élémentaire conservatif. Comme nous l'avions fait pour l'oscillateur à deux degrés de liberté, nous renonçons à cette surcharge de l'écriture, aucune confusion n'étant possible dans le présent chapitre.

A chacune des pulsations propres ω_p correspond une solution particulière (11.5) du système différentiel

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{X}_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \tag{11.13}$$

ou, en revenant à une notation indicielle

$$\begin{cases} x_{1p} = X_{1p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ip} = X_{ip} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{np} = X_{np} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \end{cases} \tag{11.14}$$

11.2.2 Solution générale · Modes propres

Afin d'éviter toute confusion pour la suite, il faut se souvenir que dans les expressions (11.14) le premier indice (i) désigne une coordonnée du système alors que le second indice (p) désigne une pulsation propre.

Le vecteur $\boldsymbol{x}_p(t)$ représente le mouvement du système lié à la pulsation propre ω_p; on l'appelle *mode propre* de rang p. Le vecteur $\boldsymbol{X}_p$ donne les amplitudes de $\boldsymbol{x}_p$, on l'appelle *forme propre* de rang p.

On obtient les composantes de $\boldsymbol{X}_p$ en introduisant la valeur $\delta = \delta_p$ dans les équations (11.7). Il faut ainsi résoudre successivement n systèmes d'équations homogènes. Les composantes de $\boldsymbol{X}_p$ n'étant déterminées qu'à un facteur près, on peut normer les formes propres de différentes manières, comme nous le verrons plus loin. Une première façon de procéder, sans intérêt sur la plan théorique mais commode en pratique, consiste à rapporter les amplitudes X_{ip} à une amplitude de référence X_p (par exemple celle de la première masse ou celle de la masse centrale en cas de symétrie géométrique du système). On écrira donc

$$\beta_{ip} = \frac{X_{ip}}{X_p} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{\beta}_p X_p \tag{11.15}$$

La solution générale du système différentiel est donnée par combinaison linéaire des solutions particulières, soit par (11.13)

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \gamma_p \boldsymbol{x}_p = \sum_p^n \gamma_p \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)$$

Comme les amplitudes X_p sont arbitraires, on ne diminue pas la généralité du résultat en choisissant $\gamma_p = 1$, d'où finalement

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad (11.16)$$

Effectuons le développement

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \beta_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n1} \end{Bmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)}_{1^{\text{er}} \text{ mode}} + \ldots + \underbrace{\begin{Bmatrix} \beta_{1p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{ip} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{np} \end{Bmatrix} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)}_{\text{mode } p} + \ldots + \qquad (11.17)$$

$$+ \ldots + \underbrace{\begin{Bmatrix} \beta_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{in} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{nn} \end{Bmatrix} X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)}_{\text{mode } n}$$

11.2.3 Autres formes de l'équation caractéristique

Il est parfois plus commode de calculer les coefficients d'influence que les rigidités dans un système élastique. On peut alors, en principe, calculer la matrice $[K]$ en inversant la matrice $[a]$. Cependant, cette opération n'est pas heureuse. En effet, reprenons l'équation (11.1)

$$[M]\, \ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

et prémultiplions par $[K]^{-1} = [a]$

$$[a]\,[M]\, \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (11.18)$$

Le produit $[a]\,[M]$ est l'inverse du noyau défini précédemment.
Ecrivons

$$[E] = [a]\,[M] = [A]^{-1} \qquad (11.19)$$

Il vient donc

$$[E]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{11.20}$$

En cherchant des solutions harmoniques

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} \cos(\omega t - \varphi) = \boldsymbol{X} \cos(\sqrt{\delta}\, t - \varphi)$$

on trouve l'équation caractéristique

$$|-\delta\,[E] + [I]| = 0 \tag{11.21}$$

dont les solutions sont naturellement les mêmes que celles de (11.8). On donne volontiers à cette équation la forme suivante

$$|[E] - \tau\,[I]| = 0 \tag{11.22}$$

dans laquelle τ est appelée *fonction de fréquence*

$$\tau = \frac{1}{\delta} \tag{11.23}$$

Il faut encore remarquer que les équations caractéristiques (11.8) et (11.22) ne sont pas favorables pour les calculs numériques. En effet, les matrices $[A]$ et $[E]$ ne sont pas symétriques alors que les matrices $[M]$ et $[K]$ le sont. Il vaut mieux, lors de tels calculs, choisir pour l'équation caractéristique l'une des formes

$$|[K] - \delta\,[M]| = 0 \tag{11.24}$$

$$|[a] - \tau\,[M]^{-1}| = 0 \tag{11.25}$$

que l'on déduit immédiatement des précédentes.

11.2.4 Résumé et commentaires · Liaisons supplémentaires

Il est utile, déjà au stade actuel de l'étude entreprise, de rappeler les principaux résultats obtenus et de formuler quelques commentaires. En particulier, nous allons signaler le rôle joué par une ou plusieurs liaisons supplémentaires.

- Un système mécanique oscillant (ou électrique, électromécanique, etc.) à n degrés de liberté possède n pulsations propres. Nous supposons pour l'instant que toutes ces pulsations sont distinctes.
- A chaque pulsation propre ω_p correspondent les déplacements harmoniques synchrones $x_{ip}(t)$ apparaissant avec des amplitudes différentes dans les déplacements totaux $x_i(t)$. Ces déplacements forment ensemble le *mode propre* de rang p. Le vecteur $\boldsymbol{x}(t)$ des déplacements totaux du système est donc la somme des modes propres, comme le montrent les équations (11.16) ou (11.17).
- Ces équations comportent $2n$ constantes d'intégration, soit n amplitudes X_p et n phases φ_p, qui sont déterminées par les conditions initiales. On peut ainsi, au moins en principe, choisir les conditions initiales de façon qu'il n'existe qu'un seul mode à la fois, tous les autres étant nuls.
- Par analogie avec les systèmes vibrants continus qui possèdent une infinité ordonnée de pulsations propres, la plus basse des pulsations propres et le

mode correspondant sont appelés *pulsation fondamentale* et *mode fondamental*.

- Le système oscillant étudié comporte donc, par hypothèse, n degrés de liberté et n pulsations propres ordonnées comme suit

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$$

Si l'on rajoute une liaison, le nombre de degrés de liberté se réduit à $(n-1)$. On peut montrer que les $(n-1)$ nouvelles pulsations propres $\omega_1', \omega_2' \ldots \omega_{n-1}'$ sont comprises entre les précédentes

$$\omega_1 < \omega_1' < \omega_2 < \omega_2' < \omega_3 < \ldots < \omega_{n-1} < \omega_{n-1}' < \omega_n \qquad (11.26)$$

- D'une manière plus générale, si l'on rajoute k liaisons, la pulsation ω_p' du système modifié est comprise entre les pulsations ω_p et ω_{p+k} du système initial,

$$\omega_p < \omega_p' < \omega_{p+k} \qquad (11.27)$$

11.3 RÉSOLUTION DU SYSTÈME PAR CHANGEMENT DE BASE

11.3.1. Découplage des équations · Coordonnées normales

La solution générale du système différentiel (11.1) a été obtenue par superposition linéaire de solutions particulières, appelées *modes propres du système*. Afin d'établir d'autres propriétés des solutions, de grande importance dans les méthodes d'analyse des vibrations, il est nécessaire d'adopter une approche différente.

Reprenons l'équation différentielle sous forme matricielle (11.1)

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Elle représente un système de n équations différentielles du second ordre à coefficients constants, couplées entre elles. Cela signifie que la i-ème équation, par exemple, peut être fonction de toutes les variables x_j et de leurs dérivées $\ddot{x}_j$, avec $j=1, 2, \ldots, n$.

Le principe de la méthode que nous allons développer consiste à rechercher un nouvel ensemble de coordonnées généralisées q_p, $p=1, \ldots, n$ de manière que le mouvement du système soit décrit par n équations différentielles découplées. Ces nouvelles coordonnées, fonctions du temps seulement, seront des combinaisons linéaires des coordonnées initiales x_i. Chaque équation p ne dépendra alors que de la variable q_p et de sa dérivée seconde $\ddot{q}_p$. Nous serons ainsi amenés à considérer n systèmes analogues à l'oscillateur élémentaire,

$$m_p^o\,\ddot{q}_p + k_p^o\,q_p = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, n \qquad (11.28)$$

ou, en divisant par m_p^o,

$$\ddot{q}_p + \delta_p\,q_p = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, n \qquad (11.29)$$

avec

$$\delta_p = \frac{k_p^o}{m_p^o} \qquad (11.30)$$

Les coordonnées q_p, appelées *coordonnées normales* (ou *coordonnées modales*) du système, sont des combinaisons linéaires des x_i et réciproquement. Il est donc possible d'effectuer le changement de variables suivant

$$\boldsymbol{x} = [B]\, \boldsymbol{q} \tag{11.31}$$

La *matrice* $[B]$, dite *de changement de base*, est carrée, régulière et de dimension n. Ses coefficients sont indépendants du temps. Les accélérations sont alors liées par la relation évidente

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = [B]\, \ddot{\boldsymbol{q}} \tag{11.32}$$

En effectuant le changement de variables dans l'équation (11.1), il vient

$$[M]\,[B]\, \ddot{\boldsymbol{q}} + [K]\,[B]\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.33}$$

Les matrices $[M]$ et $[K]$ étant symétriques, nous pouvons prémultiplier cette relation par $[B]^T$ afin de retrouver la symétrie

$$[B]^T\,[M]\,[B]\, \ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^T\,[K]\,[B]\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.34}$$

Ce système différentiel correspond à n équations découplées, de la forme (11.28), si les matrices symétriques $[B]^T\,[M]\,[B]$ et $[B]^T\,[K]\,[B]$ sont simultanément diagonales. Il s'agit alors de déterminer s'il existe une matrice $[B]$ – et laquelle – satisfaisant aux deux conditions

$$\begin{cases} \lceil M^\circ \rfloor = [B]^T\,[M]\,[B] \\ \lceil K^\circ \rfloor = [B]^T\,[K]\,[B] \end{cases} \tag{11.35}$$

Sans en faire ici la démonstration, nous pouvons affirmer, d'après le théorème spectral [22], qu'il existe une infinité de matrices inversibles $[B]$, de mêmes directions propres, telles que $[B]^T\ [M]\ [B]$ et $[B]^T\ [K]\ [B]$ soient simultanément diagonales et réelles. Il est nécessaire et suffisant pour cela que les matrices $[M]$ et $[K]$ soient toutes deux symétriques et que l'une d'elles, au moins, soit définie positive. Tel est bien le cas, comme nous l'avons montré au chapitre 10.

Récrivons le système différentiel (11.34) en le prémultipliant par $[[B]^T\ [M]\,[B]]^{-1}$. On obtient

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^{-1}\,[M]^{-1}[K]\,[B]\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.36}$$

En comparant cette relation à (11.29), on peut écrire, les termes de la matrice diagonale $\lceil \Delta \rfloor$ étant les quantités δ_p,

$$[B]^{-1}\,[M]^{-1}\,[K]\,[B] = \lceil \Delta \rfloor \tag{11.37}$$

La matrice cherchée $[B]$ est donc celle qui permet de diagonaliser le noyau $[A] = [M]^{-1}\,[K]$ du système

$$[B]^{-1}\,[A]\,[B] = \lceil \Delta \rfloor \tag{11.38}$$

La diagonalisation d'une matrice carrée est une opération courante d'algèbre linéaire. Ainsi, avant même de procéder aux calculs qui vont suivre, nous savons déjà que les termes de la matrice diagonale $\lceil \Delta \rfloor$ sont les valeurs propres de la matrice $[A]$ et que les colonnes de la matrice $[B]$ sont formées par les vecteurs propres de $[A]$, correspondant à chaque valeur propre.

11.3.2 Problème aux valeurs propres

Récrivons (11.38) en prémultipliant les deux membre par $[B]$

$$[A]\,[B] = [B]\,\lceil\Delta\rfloor \tag{11.39}$$

En désignant par $\boldsymbol{B}_p$ les colonnes de la matrice $[B]$, cette relation prend la forme

$$[[A]\,\boldsymbol{B}_1 \dots [A]\,\boldsymbol{B}_p \dots [A]\boldsymbol{B}_n] = [\delta_1\,\boldsymbol{B}_1 \dots \delta_p\boldsymbol{B}_p \dots \delta_n\,\boldsymbol{B}_n] \tag{11.40}$$

La matrice du premier membre et celle du second membre sont égales si leurs colonnes sont identiques, autrement dit

$$[A]\,\boldsymbol{B}_p = \delta_p\,\boldsymbol{B}_p \tag{11.41}$$

Comme δ_p est un nombre, ce résultat peut s'écrire

$$[[A] - \delta_p\,\lceil I\rfloor]\,\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{0} \tag{11.42}$$

Le système (11.42) comporte n équations à n inconnues. Il n'admet de solutions non toutes nulles que si son déterminant est nul

$$|\,[A] - \delta_p\,\lceil I\rfloor\,| = 0$$

On a retrouvé l'équation caractéristique (11.8) permettant de calculer les valeurs propres de $[A]$, supposées toutes distinctes. Une fois ces valeurs propres obtenues, l'équation (11.42) permet de calculer, à un facteur près, les colonnes de la matrice $[B]$. Il s'agit ainsi de résoudre successivement n systèmes homogènes de n équations algébriques à n inconnues.

On peut encore signaler que le vecteur propre $\boldsymbol{B}_p$ est proportionnel aux vecteurs colonnes, tous égaux à un facteur près, de la matrice adjointe de $[[A] - \delta_p\,\lceil I\rfloor]$.

Nous avons ainsi montré qu'il est toujours possible de transformer le système différentiel (11.1) en un système découplé

$$\lceil M^o\rfloor\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \lceil K^o\rfloor\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.43}$$

Rappelons que $\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q}$ et que les matrices $\lceil M^o\rfloor$ et $\lceil K^o\rfloor$ sont définies par (11.35). En divisant (11.43) par $\lceil M^o\rfloor$, on obtient

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \lceil M^o\rfloor^{-1}\,\lceil K^o\rfloor\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.44}$$

En tenant compte de la définition (11.37), la comparaison de ce résultat avec (11.36) montre que

$$\lceil M^o\rfloor^{-1}\,\lceil K^o\rfloor = \lceil\Delta\rfloor \tag{11.45}$$

Il vient donc finalement

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \lceil\Delta\rfloor\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{11.46}$$

qui est le système de *n équations différentielles du second ordre découplées* (11.29) que nous désirions obtenir.

11.3.3 Formes énergétiques · Signe des valeurs propres

On sait, d'après (10.3) et (10.2), que les énergies potentielle et cinétique ont pour valeurs

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T [K] \boldsymbol{x}$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}}$$

Le changement de coordonnées $\boldsymbol{x}=[B] \boldsymbol{q}$ donne ainsi

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T [B]^T [K] [B] \boldsymbol{q}$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T [B]^T [M] [B] \dot{\boldsymbol{q}}$$

soit, compte tenu des relations (11.35)

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T \lceil K^o \rfloor \boldsymbol{q} = \frac{1}{2} \sum_p^n k_p^o q_p^2 \qquad (11.47)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \lceil M^o \rfloor \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2} \sum_p^n m_p^o \dot{q}_p^2 \qquad (11.48)$$

Ainsi, comme on devait s'y attendre, les énergies potentielle et cinétique, exprimées dans la base modale, sont les sommes de n quantités indépendantes.

Nous allons montrer que les ***valeurs propres du système sont toutes positives ou nulles***. Les termes m_p^o de la matrice $\lceil M^o \rfloor$ sont tous exclusivement positifs puisque l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive.

$$m_p^o > 0 \qquad (11.49)$$

Les termes k_p^o de $\lceil K^o \rfloor$ peuvent être positifs ou nuls car l'énergie potentielle est une forme quadratique semi-définie positive.

$$k_p^o \geqslant 0 \qquad (11.50)$$

Il en résulte que

$$\delta_p = \frac{k_p^o}{m_p^o} \geqslant 0 \qquad (11.51)$$

ce qui justifie l'écriture

$$\delta_p = \omega_p^2 \qquad (11.52)$$

11.3.4 Forme générale de la solution

Compte tenu de (11.52), l'intégration des équations (11.29) est immédiate

$$q_p = Q_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{11.53}$$

Revenons aux coordonnées initiales du système au moyen de (11.31)

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q}$$

on obtient

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p\, q_p \tag{11.54}$$

et finalement, en remplaçant les q_p par leurs expressions ci-dessus,

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p\, Q_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \tag{11.55}$$

Les $\boldsymbol{B}_p$ n'étant définis qu'à un facteur près, le changement d'écriture $\boldsymbol{B}_p\, Q_p = \boldsymbol{\beta}_p\, X_p$ permet de retrouver (11.16)

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p\, X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)$$

Nous constatons ainsi que les grandeurs q_p, que nous avons appelées *coordonnées normales, correspondent aux modes propres du système.*

Les vecteurs propres du noyau $[A]$ sont proportionnels aux colonnes $\boldsymbol{B}_p$ de la matrice $[B]$, donc proportionnels également aux vecteurs $\boldsymbol{\beta}_p$ apparaissant dans la relation précédente. Ce sont les *vecteurs modaux*, appelés également *formes propres* du système. Il s'agit des configurations statiques liées à chacune des pulsations propres.

On sait que tout vecteur proportionnel à un vecteur propre est lui-même un vecteur propre. Dès lors, pour la suite, les symboles $\boldsymbol{B}_p$ et $\boldsymbol{\beta}_p$ sont équivalents. Le choix ne dépendra que de la commodité d'écriture pour exprimer le résultat cherché.

Comme l'énergie potentielle du système est semi-définie positive, elle peut éventuellement s'annuler sans que les q_p soient tous nuls simultanément. Cela signifie alors que l'un au moins des k_p^o est nul, ainsi que la pulsation ω_p correspondante. Un mouvement q_p à pulsation nulle est appelé *mode flottant* ou *mode corps rigide*. Un système possédant cette caractéristique est qualifié de flottant ou semi-défini. Si un système possède r modes flottants, le rang de ses matrices $[K]$, $[K^o]$ et $[A]$ est alors $n-r$.

11.3.5 Indépendance linéaire et orthogonalité des vecteurs modaux

Les directions des coordonnées x_i, linéairement indépendantes, constituent une base de l'*espace de configuration*. De même, les vecteurs modaux sont linéairement indépendants et forment une nouvelle base de cet espace. Cette base et la matrice $[B]$ sont appelées respectivement *base modale* et *matrice modale*.

L'indépendance linéaire des vecteurs modaux s'exprime par la relation

$$\sum_p^n \gamma_p\, \boldsymbol{\beta}_p \neq \boldsymbol{0} \tag{11.56}$$

dans laquelle les γ_p sont des constantes arbitraires, non toutes nulles. Elle se démontre facilement, ce que nous ne ferons pas ici, à partir d'une autre propriété des vecteurs modaux dénommée *orthogonalité des vecteurs modaux* ou *orthogonalité des modes*. Les relations exprimant cette dernière propriété, fondamentale en analyse modale, peuvent être établies à partir des expressions (11.35). Commençons par la première

$$[B]^T\,[M]\,[B] = \lceil M^o \rfloor$$

En faisant apparaître les vecteurs modaux $\boldsymbol{\beta}_p$ on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\beta}_n^T \end{bmatrix} [M]\,[\boldsymbol{\beta}_1 \dots \boldsymbol{\beta}_n] = \begin{bmatrix} m_1^o & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n^o \end{bmatrix} \tag{11.57}$$

Par identification terme à terme, on obtient

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_r = m_r^o \tag{11.58}$$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_s = 0 \qquad r \neq s \tag{11.59}$$

soit, en utilisant le symbole de Kronecker δ_{rs},

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_s = \delta_{rs}\, m_r^o \tag{11.60}$$

La relation (11.59) exprime l'*orthogonalité des vecteurs modaux* alors que la relation (11.58) définit la *masse modale* m_r^o attribuée au mode r du système. La valeur effective de m_r^o dépend du choix fait pour la normalisation des vecteurs $\boldsymbol{\beta}_p$.

En répétant le calcul avec la seconde relation (11.35), on obtient de même

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[K]\,\boldsymbol{\beta}_s = \delta_{rs}\, k_r^o \tag{11.61}$$

Dans cette relation, k_r^o est la *rigidité modale* attribuée au mode r.

L'orthogonalité des vecteurs modaux peut alors se résumer ainsi: le produit scalaire, pondéré par la matrice des masses ou la matrice de rigidité, de deux formes propres ou modes propres de rang différent est nul.

Lorsque la matrice des masses est diagonale avec des termes tous égaux, $[M] = m_0 \lceil I \rfloor$, l'orthogonalité prend la forme d'un produit scalaire direct

$$\boldsymbol{\beta}_r^T \cdot \boldsymbol{\beta}_s = 0 \qquad r \neq s \tag{11.62}$$

11.3.6 Normalisation des formes propres

Le fait que les vecteurs modaux composant la matrice modale $[B]$ ne soient définis qu'à un facteur près autorise un choix quelconque de normalisation des formes propres. Voici quelques exemples.

- On donne une valeur unitaire à l'amplitude d'une variable déterminée $i = m$, quel que soit l'ordre du mode, $X_{mp} = 1$. En général, il s'agit de la première variable, donc $X_{1p} = 1$.

- On donne une valeur unitaire à la plus grande des amplitudes apparaissant dans un mode, $(X_{ip})_{max}=1$.
- Les masses modales sont rendues toutes unitaires, c'est-à-dire

  $$[B]^T\,[M]\,[B] = [\,I\,] \tag{11.63}$$

  Cette normalisation est adoptée dans les problèmes d'identification de structures, d'analyse de sensitivité, etc.
- Une longueur unité est attribuée à chaque vecteur modal, soit

  $$\|\boldsymbol{\beta}_p\| = \sum_i^n \beta_{ip}^2 = 1 \tag{11.64}$$

  Il s'agit d'une normalisation souvent adoptée pour la représentation graphique des formes propres.

11.4 RÉPONSE À UNE EXCITATION INITIALE

Revenons à la solution (11.16) du système

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p\, X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)\\ &= \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p\, X_p\,(\cos\varphi_p \cos\omega_p t + \sin\varphi_p \sin\omega_p t)\end{aligned}$$

et considérons un lâcher avec des conditions initiales quelconques

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_0 \tag{11.65}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{V}_0 \tag{11.66}$$

Il vient successivement

$$\boldsymbol{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p\, X_p \cos\varphi_p \tag{11.67}$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p\, \omega_p\, X_p \sin\varphi_p \tag{11.68}$$

Afin d'éliminer les constantes X_p et φ_p, prémultiplions les relations ci-dessus par $\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]$,

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_p\, X_p \cos\varphi_p$$

$$\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_p\, \omega_p\, X_p \sin\varphi_p$$

En utilisant les relations d'orthogonalité (11.60), on aboutit aux équations

$$X_r \cos\varphi_r = \frac{1}{m_r^o}\,\boldsymbol{\beta}_r^T\,[M]\,\boldsymbol{X}_0 \tag{11.69}$$

$$X_r \sin \varphi_r = \frac{1}{m_r^o \, \omega_r} \boldsymbol{\beta}_r^T \, [M] \, \boldsymbol{V}_0 \tag{11.70}$$

La réponse du système aux conditions initiales ci-dessus est ainsi

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p (\boldsymbol{\beta}_p^T \, [M] \, \boldsymbol{X}_0 \cos \omega_p t + \frac{1}{\omega_p} \boldsymbol{\beta}_p^T \, [M] \, \boldsymbol{V}_0 \sin \omega_p t) \tag{11.71}$$

Examinons le cas particulier où le vecteur des déplacements initiaux est proportionnel à l'un des vecteurs propres $\boldsymbol{\beta}_r$ et où le vecteur des vitesses initiales est nul.

$$\boldsymbol{X}_0 = X_0 \, \boldsymbol{\beta}_r \tag{11.72}$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{0} \tag{11.73}$$

La réponse du système est alors

$$\boldsymbol{x} = X_0 \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p (\boldsymbol{\beta}_p^T \, [M] \, \boldsymbol{\beta}_r) \cos \omega_p t$$

et finalement, du fait de l'orthogonalité des modes (11.60),

$$\boldsymbol{x} = X_0 \, \boldsymbol{\beta}_r \cos \omega_r t \tag{11.74}$$

Ce résultat montre que le système ne vibre que selon le mode r. Ainsi, on peut isoler un mode vibratoire, dans un système conservatif à n degrés de liberté en régime libre, en choisissant les conditions initiales (11.72) et (11.73).

Si l'on remplace la condition de vitesse initiale nulle par la condition moins restrictive

$$\boldsymbol{V}_0 = V_0 \, \boldsymbol{\beta}_r \tag{11.75}$$

le mouvement du système ne comporte également que le mode de rang r. En effet, on trouve facilement dans ce cas

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_r}\right)^2} \, \boldsymbol{\beta}_r \cos (\omega_r t - \varphi_r) \qquad \operatorname{tg} \varphi_r = \frac{V_0}{X_0 \, \omega_r} \tag{11.76}$$

11.5 QUOTIENT DE RAYLEIGH

En remplaçant le noyau $[A]$ par sa valeur $[M]^{-1} [K]$, le problème aux valeurs propres (11.42), examiné précédemment, peut se mettre sous la forme

$$\delta_p [M] \, \boldsymbol{\beta}_p = [K] \, \boldsymbol{\beta}_p \qquad (\delta_p = \omega_p^2) \tag{11.77}$$

Dans certains cas, lorsque la connaissance de tous les modes et fréquences propres n'est pas indispensable et que l'on ne recherche qu'une estimation de la pulsation fondamentale, l'utilisation du quotient de Rayleigh s'avère très profitable.

Afin d'introduire cette notion, considérons les solutions δ_p, $\boldsymbol{\beta}_p$ ($p = 1, 2, ..., n$) satisfaisant à

$$\delta_p[M]\,\boldsymbol{\beta}_p = [K]\,\boldsymbol{\beta}_p \qquad p = 1, 2, ..., n$$

En prémultipliant les deux membres par $\boldsymbol{\beta}_p^T$, puis en les divisant par le scalaire $\boldsymbol{\beta}_p^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_p$, c'est-à-dire par la masse modale m_p^o, on obtient

$$\delta_p = \omega_p^2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_p^T\,[K]\,\boldsymbol{\beta}_p}{\boldsymbol{\beta}_p^T\,[M]\,\boldsymbol{\beta}_p} \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{11.78}$$

Ainsi les valeurs propres peuvent être écrites sous la forme du quotient de deux triples produits de matrices représentant des formes quadratiques; le numérateur correspond à l'énergie potentielle et le dénominateur à l'énergie cinétique du mode considéré.

Ecrivons ce même rapport pour un vecteur quelconque $\boldsymbol{u}$. Il vient

$$\delta = \omega^2 = R(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^T\,[K]\,\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T\,[M]\,\boldsymbol{u}} \tag{11.79}$$

On appelle la quantité ainsi définie $R(\boldsymbol{u})$ le *quotient de Rayleigh*, scalaire qui dépend des matrices $[K]$ et $[M]$ ainsi que de $\boldsymbol{u}$.

Pour un système donné le quotient de Rayleigh ne dépend que de $\boldsymbol{u}$, les matrices $[M]$ et $[K]$ étant déterminées par les caractéristiques du système. Ce quotient possède les propriétés intéressantes que nous allons établir ci-après.

Exprimons le vecteur quelconque $\boldsymbol{u}$ comme combinaison linéaire des vecteurs modaux (11.56)

$$\boldsymbol{u} = \sum_p^n \gamma_p\,\boldsymbol{\beta}_p \tag{11.80}$$

ou encore, sous forme matricielle, $[B]$ étant la matrice modale et γ le vecteur constitué des coefficients γ_p,

$$\boldsymbol{u} = [B]\,\gamma \tag{11.81}$$

Supposons d'autre part que les vecteurs modaux soient normalisés de manière que

$$[B]^T\,[M]\,[B] = \lceil I \rfloor$$

Il en résulte, compte tenu de (11.35) et (11.45)

$$[B]^T\,[K]\,[B] = \lceil \Delta \rfloor$$

On peut alors introduire la relation (11.81) dans la définition (11.79) du quotient de Rayleigh puis utiliser les deux relations ci-dessus

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{\gamma^T\,[B]^T\,[K]\,[B]\,\gamma}{\gamma^T\,[B]^T\,[M]\,[B]\,\gamma} = \frac{\gamma^T\,\lceil \Delta \rfloor\,\gamma}{\gamma^T\,\lceil I \rfloor\,\gamma} \tag{11.82}$$

Dans ce dernier résultat, les produits matriciels sont les sommes de n quantités scalaires

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{\sum\limits_{p}^{n} \delta_p \gamma_p^2}{\sum\limits_{p}^{n} \gamma_p^2} \tag{11.83}$$

Quand le vecteur $\boldsymbol{u}$ est peu différent du vecteur propre $\boldsymbol{\beta}_r$, les γ_p pour $p \neq r$ sont très petits comparés à γ_r

$$\gamma_p = \varepsilon_p \gamma_r \qquad p = 1, 2, ..., n \qquad (\varepsilon_p \ll 1 \quad \forall p \neq r) \tag{11.84}$$

En introduisant (11.84) dans (11.83) et en divisant par γ_r^2 on obtient

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{\delta_r + \sum\limits_{p \neq r}^{n} \delta_p \varepsilon_p^2}{1 + \sum\limits_{p \neq r}^{n} \varepsilon_p^2} \tag{11.85}$$

Calculons la valeur approchée de $R(\boldsymbol{u})$ au voisinage de $\varepsilon_p = 0$

$$R(\boldsymbol{u}) \approx (\delta_r + \sum_{p \neq r}^{n} \delta_p \varepsilon_p^2)(1 - \sum_{p \neq r}^{n} \varepsilon_p^2)$$

$$R(\boldsymbol{u}) \approx \delta_r + \sum_{p \neq r}^{n} (\delta_p - \delta_r)\, \varepsilon_p^2 \tag{11.86}$$

Quand le vecteur $\boldsymbol{u}$ ne diffère de $\boldsymbol{\beta}_r$ que d'une quantité petite du premier ordre, $R(\boldsymbol{u})$ ne diffère de $\delta_r = \omega_r^2$ que d'une quantité petite du second ordre. Ainsi le quotient de Rayleigh $R(\boldsymbol{u})$ possède une valeur stationnaire au voisinage d'un vecteur propre.

Cependant la propriété la plus importante du quotient de Rayleigh est qu'il présente un minimum au voisinage du mode fondamental.

En effet, si $r = 1$ dans (11.86), on obtient

$$R(\boldsymbol{u}) \simeq \delta_1 + \sum_{p=2}^{n} (\delta_p - \delta_1)\, \varepsilon_p^2 \tag{11.87}$$

Les valeurs propres sont ordonnées comme suit

$$\delta_i > \delta_1 \qquad (i = 2, ..., n)$$

Il en résulte

$$R(\boldsymbol{u}) \geqslant \delta_1 \tag{11.88}$$

Le quotient de Rayleigh est ainsi toujours supérieur ou égal à la valeur propre fondamentale. L'utilité principale du quotient de Rayleigh est de permettre une estimation de la pulsation propre fondamentale d'un système par l'utilisation d'un vecteur propre fondamental approché, déterminé par des considérations physiques (un exemple est traité au paragraphe 11.6.3).

Enfin, il est facile de vérifier que la relation (11.79) peut se mettre sous la forme équivalente suivante

$$R(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T [a] [M] \boldsymbol{u}} \tag{11.89}$$

Elle est préférable quand on connaît la matrice $[a]$ des coefficients d'influence.

11.6 EXEMPLES D'OSCILLATEURS GÉNÉRALISÉS CONSERVATIFS

11.6.1 Pendule triple symétrique

Le calcul des petits mouvements du système constitué par trois pendules pesants, égaux et couplés symétriquement (pendule triple symétrique, fig. 11.1), est un exemple élémentaire et classique pour concrétiser la notion de modes propres.

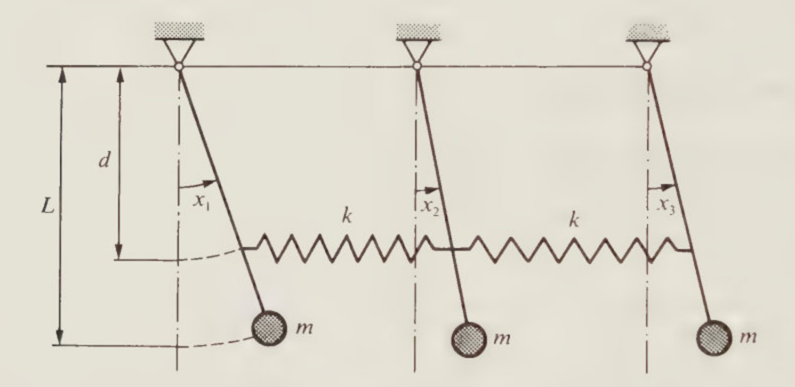


Fig. 11.1 Pendule triple symétrique.

L'énergie cinétique a pour valeur

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i^3 (L \dot{x}_i)^2 = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

L'énergie potentielle comprend deux parts, celle due à l'élévation des masses dans le champ de pesanteur et celle qui correspond à la déformation des ressorts

$$V = m\, g\, L \sum_i^3 (1 - \cos x_i) + \frac{1}{2} k \left((d \sin x_1 - d \sin x_2)^2 + (d \sin x_2 - d \sin x_3)^2\right)$$

Après les dérivations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

on adopte l'hypothèse des petits angles ($\sin x \approx x$ et $\cos x \approx 1$). Il vient ainsi

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 m L^2 + x_1 (m g L + k d^2) - x_2 k d^2 = 0 \\ \ddot{x}_2 m L^2 - x_1 k d^2 + x_2 (m g L + 2 k d^2) - x_3 k d^2 = 0 \\ \ddot{x}_3 m L^2 - x_2 k d^2 + x_3 (m g L + k d^2) = 0 \end{cases} \quad (11.90)$$

En comparant ces équations avec l'équation matricielle

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

et en définissant le rapport, proportionnel au couplage

$$\mu = \frac{k d^2}{m g L} \quad (11.91)$$

on voit que la matrice des masses et la matrice des rigidités ont pour valeurs

$$[M] = m L^2 [I] \qquad [K] = m g L \begin{bmatrix} 1+\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1+2\mu & -\mu \\ 0 & -\mu & 1+\mu \end{bmatrix} \quad (11.92)$$

Le noyau du système est ici particulièrement simple à calculer

$$[A] = [M]^{-1} [K] = \frac{g}{L} \begin{bmatrix} 1+\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1+2\mu & -\mu \\ 0 & -\mu & 1+\mu \end{bmatrix} \quad (11.93)$$

Cherchons maintenant les valeurs propres δ par l'équation caractéristique (11.8)

$$|[A] - \delta [I]| = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{L}{g}[A] - \frac{L\delta}{g}[I]\right| = 0$$

Avec la convention d'écriture

$$y = \frac{L}{g}\delta \quad (11.94)$$

cette équation devient

$$\begin{vmatrix} 1+\mu-y & -\mu & 0 \\ -\mu & 1+2\mu-y & -\mu \\ 0 & -\mu & 1+\mu-y \end{vmatrix} = 0$$

soit, après développement,

$$(1-y)(1+\mu-y)(1+3\mu-y) = 0 \quad (11.95)$$

Les solutions donnent les valeurs et pulsations propres

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 + \mu \\ y_3 = 1 + 3\,\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{g}{L} \\ \delta_2 = \dfrac{g}{L}(1+\mu) \\ \delta_3 = \dfrac{g}{L}(1+3\,\mu) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \\ \omega_2 = \omega_1\sqrt{1+\mu} \\ \omega_3 = \omega_1\sqrt{1+3\,\mu} \end{cases} \tag{11.96}$$

On remarque déjà que la pulsation fondamentale ω_1 est celle du pendule simple. Le couplage n'intervenant pas, les trois pendules doivent osciller ensemble, ce que va confirmer le calcul des formes propres.

Rappelons que ce calcul nécessite la résolution de trois systèmes homogènes obtenus en remplaçant successivement δ par δ_1, δ_2 et δ_3. On obtiendra naturellement les mêmes résultats, les solutions n'étant définies qu'à un facteur près, en remplaçant y par y_1, y_2 et y_3 dans les termes de l'équation caractéristique. Ces termes sont les coefficients des équations à résoudre. Quant aux variables de ces équations, elles sont proportionnelles aux amplitudes des oscillations. On les désignera r, s, t pour simplifier l'écriture.

Première forme propre

$$y = y_1 = 1$$

$$\begin{cases} \mu\, r - \mu\, s = 0 \\ -\mu\, r + 2\,\mu\, s - \mu\, t = 0 \\ -\mu\, s + \mu\, t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = r \\ t = r \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11.97}$$

Deuxième forme propre

$$y = y_2 = 1 + \mu$$

$$\begin{cases} -\mu\, s = 0 \\ -\mu\, r + \mu\, s - \mu\, t = 0 \\ -\mu\, s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = -r \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{11.98}$$

Troisième forme propre

$$y = y_3 = 1 + 3\,\mu$$

$$\begin{cases} -2\,\mu\, r - \mu\, s = 0 \\ -\mu\, r - \mu\, s - \mu\, t = 0 \\ -\mu\, s - 2\,\mu\, t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -2\,r \\ t = r \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11.99}$$

Vérifions l'orthogonalité des formes propres, en utilisant la relation (11.62) puisque $[M] = m\,L^2\,[\ulcorner I \lrcorner]$

$$\boldsymbol{\beta}_1^T \cdot \boldsymbol{\beta}_2 = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^T \cdot \boldsymbol{\beta}_3 = (1 \quad 0 -1) \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\beta}_3^T \cdot \boldsymbol{\beta}_1 = (1 -2 \quad 1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$$

Les conditions initiales mises à part, le régime libre est maintenant entièrement déterminé

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} X_3 \cos(\omega_3 t - \varphi_3) \tag{11.100}$$

Les formes propres sont représentées par la figure 11.2.

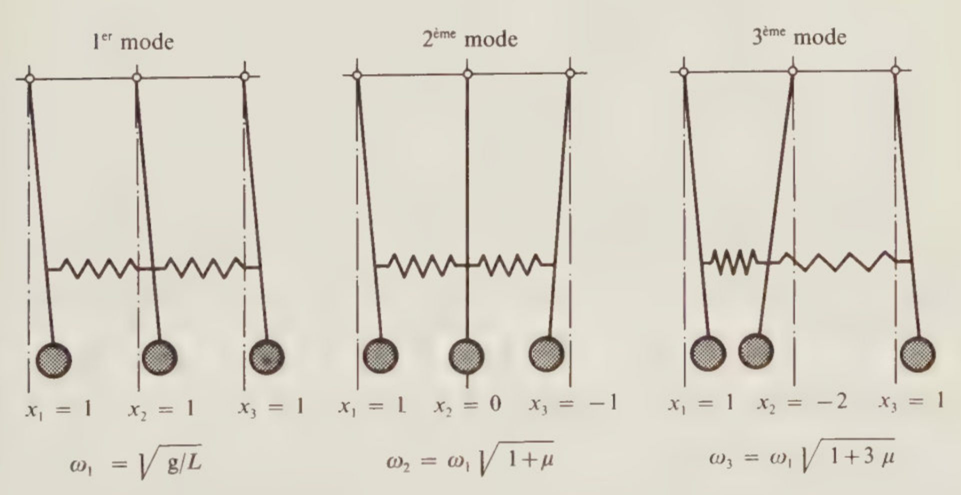


Fig. 11.2 Formes et pulsations propres du système de la figure 11.1.

Afin de montrer l'influence du couplage sur les fréquences propres, choisissons un exemple numérique:

$L = 1$ m $\qquad d = 0{,}5$ m $\qquad m = 1$ kg

La fréquence fondamentale est ainsi

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\,\omega_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

En prenant la rigidité des ressorts comme variable, le coefficient μ, proportionnel au couplage, et les deux autres fréquences propres ont pour valeurs (fig. 11.3)

$$\mu = \frac{d^2}{m\,g\,L}\,k = 0{,}0255\,k$$

$$f_2 = f_1\sqrt{1+\mu} \qquad f_3 = f_1\sqrt{1+3\,\mu}$$

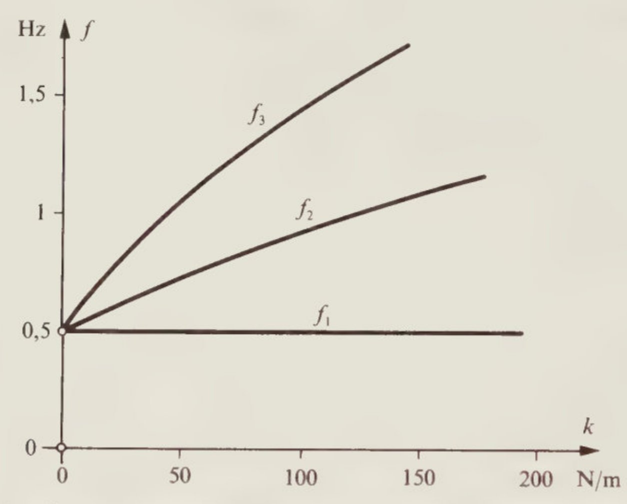


Fig. 11.3 Fréquences propres en fonction de la rigidité des ressorts de couplage.

Comme on devait s'y attendre, les trois fréquences propres deviennent égales quand le couplage tend vers zéro. Le système dégénère alors en trois pendules simples indépendants.

11.6.2 Masses concentrées sur une corde

Une corde est un élément de la mécanique, à une dimension, ne pouvant transmettre qu'un effort de traction. Nous allons traiter l'exemple des vibrations latérales et coplanaires de n masses ponctuelles sur une corde de tension initiale T. Le comportement du système est linéaire quand l'influence des mouvements des masses sur la tension initiale est négligeable. La corde étant supposée sans masse, la déformée est constituée de $n+1$ segments de droite (fig. 11.4).

Il est commode d'utiliser la forme (11.18) de l'équation différentielle

$$[a]\,[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

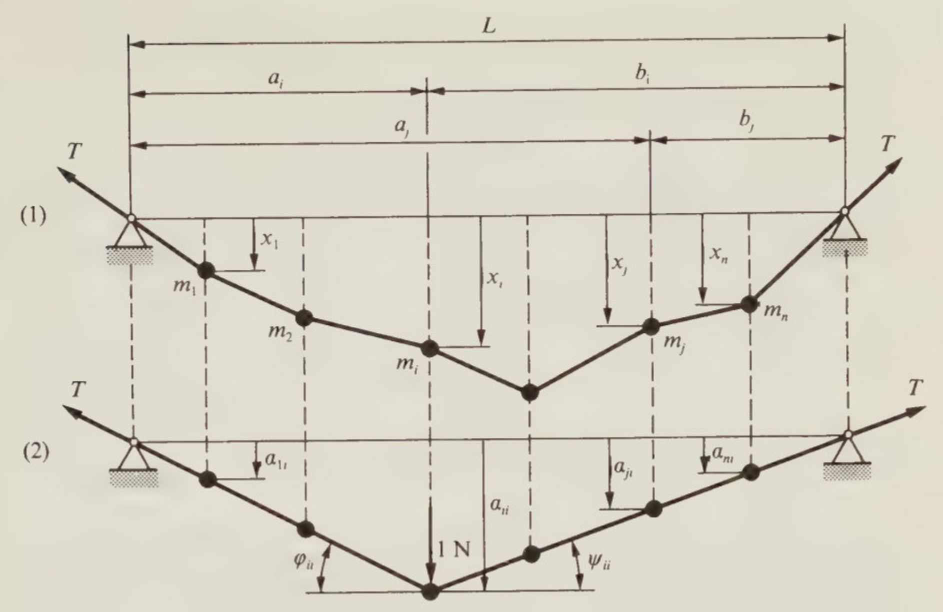


Fig. 11.4 Masses ponctuelles sur une corde de tension T
(1) déformée dynamique
(2) déformée statique due à une charge de 1 N sur m_i.

La matrice des masses est diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

On calcule la matrice des coefficients d'influence en considérant l'équilibre de la masse m_i soumise à une charge de 1 N. Il vient, les angles étant petits,

$$1 = T(\varphi_{ii}+\psi_{ii}) = T\left(\frac{a_{ii}}{a_i}+\frac{a_{ii}}{b_i}\right)$$

Avec $a_i+b_i=L$ on obtient

$$a_{ii} = \frac{a_i\, b_i}{T\, L}$$

puis, par simple proportionnalité

$$\begin{cases} a_{ji} = \dfrac{b_j}{b_i}\, a_{ii} & \text{si } j > i \qquad (a_j > a_i) \\[2ex] a_{ji} = \dfrac{a_j}{a_i}\, a_{ii} & \text{si } j < i \qquad (a_j < a_i) \end{cases}$$

d'où en remplaçant a_{ii} par sa valeur

$$\begin{cases} a_{ji} = \dfrac{a_i\, b_j}{T\, L} & \text{si } j > i \qquad (m_j \text{ à droite de } m_i) \\[2ex] a_{ji} = \dfrac{a_j\, b_i}{T\, L} & \text{si } j < i \qquad (m_j \text{ à gauche de } m_i) \end{cases} \tag{11.101}$$

On remarque que les coefficients d'influence, et donc les fréquences propres des petits mouvements transversaux du système, ne sont pas fonction de la section ni du module d'élasticité de la corde. Les longueurs et les masses mises à part, seule importe la tension initiale. La situation serait inversée si l'on étudiait les petits mouvements longitudinaux du système.

Examinons le cas particulier de trois masses égales équidistantes. La matrice des masses est alors (fig. 11.5)

$$[M] = m\, [I]$$

On sait que la matrice $[a]$ des coefficients d'influence est symétrique en raison de la linéarité du système. Comme dans l'exemple précédent du pendule triple, le système possède un axe de symétrie géométrique et la matrice $[a]$ devient ainsi doublement symétrique.

On trouve facilement au moyen des relations (11.101)

$$[a] = \frac{L}{4\,T} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{11.102}$$

La matrice $[E] = [a]\,[M]$ (inverse du noyau) se calcule immédiatement dans le cas particulier et l'on choisit la forme (11.22) de l'équation caractéristique ($\tau = 1/\delta =$ fonction de fréquence)

$$|\,[E] - \tau\, [I]\,| = 0$$

$$\left| \frac{m\,L}{4\,T} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

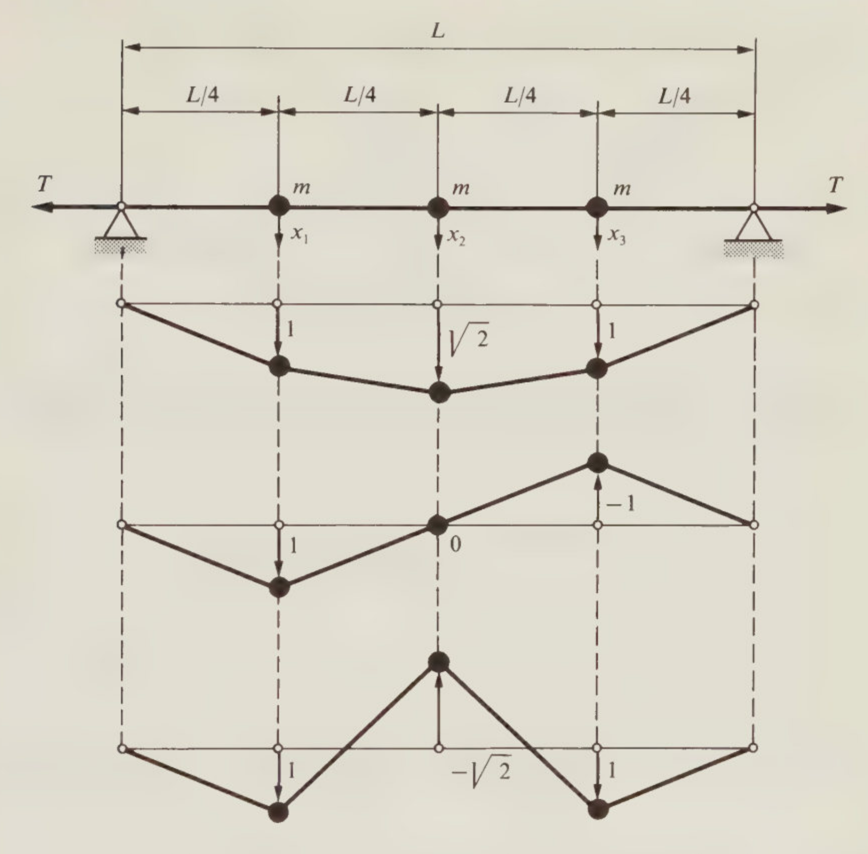


Fig. 11.5 Système de 3 masses égales sur une corde de tension T.

Avec la notation plus commode

$$z = \tau \frac{4\,T}{m\,L} = \frac{1}{\delta}\,\frac{4\,T}{m\,L} = \frac{1}{\omega^2}\,\frac{4\,T}{m\,L} \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{4}{z}\,\frac{T}{m\,L} \tag{11.103}$$

l'équation devient

$$\begin{vmatrix} (3/4-z) & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & (1-z) & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & (3/4-z) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.104}$$

On trouve aisément les trois solutions puis les pulsations propres

$$\begin{cases} z_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \omega_1 = 1{,}53 \sqrt{\dfrac{T}{m\,L}} \\[2ex] z_2 = \dfrac{1}{2} & \omega_2 = 2{,}83 \sqrt{\dfrac{T}{m\,L}} \\[2ex] z_3 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \omega_3 = 3{,}70 \sqrt{\dfrac{T}{m\,L}} \end{cases} \tag{11.105}$$

Nous ne reproduirons pas le calcul — sans difficulté — des formes propres représentées sur la figure 11.5. Après avoir vérifié leur orthogonalité, on obtient le régime libre du système

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} X_3 \cos(\omega_3 t - \varphi_3) \tag{11.106}$$

On remarque que la masse centrale reste immobile pour le deuxième mode. Cette circonstance joue un rôle important dans le régime permanent du système [3].

11.6.3 Masses concentrées sur une poutre

De nombreux systèmes réels peuvent être, avec une bonne approximation pour les besoins de la pratique, schématisés par des masses concentrées sur une poutre sans masse. Ils sont alors assimilés à des systèmes discrets ayant un nombre fini de degrés de liberté, soit un nombre fini de fréquences et modes propres.

Nous nous limiterons ici au cas le plus simple, celui des vibrations latérales et coplanaires de masses ponctuelles sur une poutre droite (fig. 11.6).

Comme au paragraphe précédent, on utilise l'équation (11.18)

$$[a]\,[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Dans le cas particulier, la matrice $[M]$ est connue immédiatement alors que la matrice $[a]$ doit être établie au moyen des méthodes de la résistance des matériaux.

La figure 11.7 représente le cas très simple d'une poutre sur deux appuis supportant quatre masses égales équidistantes. Ce système possédant un axe de symétrie géométrique, la matrice des coefficients d'influence est doublement symétrique.

La matrice des masses est ici

$$[M] = m \lceil I \rfloor$$

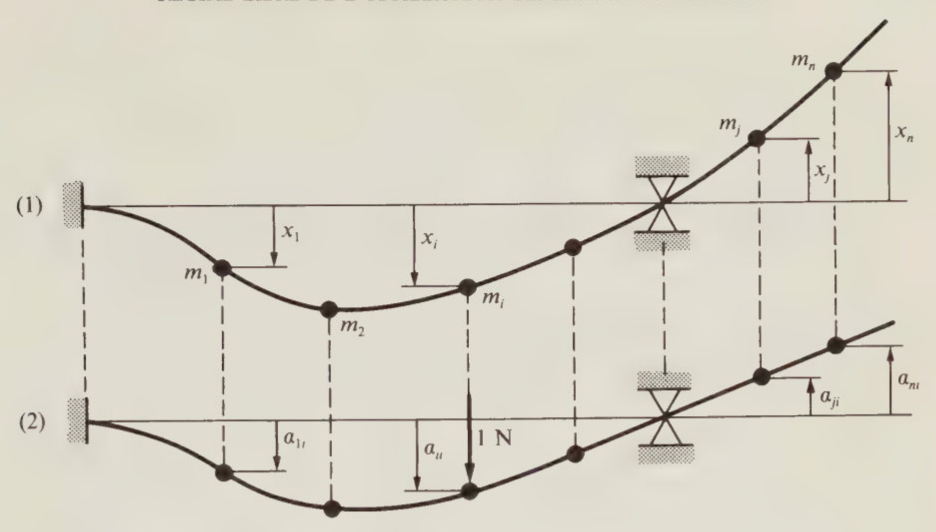


Fig. 11.6 Masses ponctuelles sur une poutre
(1) déformée dynamique
(2) déformée statique due à une charge de 1 N sur m_i.

Un formulaire de résistance des matériaux permet de calculer la matrice $[a]$

$$[a] = \frac{L^3}{122{,}88\ E\ I} \begin{bmatrix} 0{,}49 & 0{,}95 & 0{,}81 & 0{,}31 \\ 0{,}95 & 2{,}25 & 2{,}07 & 0{,}81 \\ 0{,}81 & 2{,}07 & 2{,}25 & 0{,}95 \\ 0{,}31 & 0{,}81 & 0{,}95 & 0{,}49 \end{bmatrix} \tag{11.107}$$

Revenons à l'équation caractéristique (11.22), $\tau = 1/\delta$ étant la fonction de fréquence,

$$|\,[E] - \tau\,[I]\,| = 0 \qquad [E] = [a]\,[M]$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit la notation

$$z = \tau \frac{122{,}88\ E\ I}{m\ L^3} = \frac{1}{\delta}\ \frac{122{,}88\ E\ I}{m\ L^3} = \frac{1}{\omega^2}\ \frac{122{,}88\ E\ I}{m\ L^3} \tag{11.108}$$

d'où l'on tire

$$\omega^2 = \frac{122{,}88}{z}\ \frac{E\ I}{m\ L^3} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{122{,}88}{z}} \cdot \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{E\ I}{m\ L}} \tag{11.109}$$

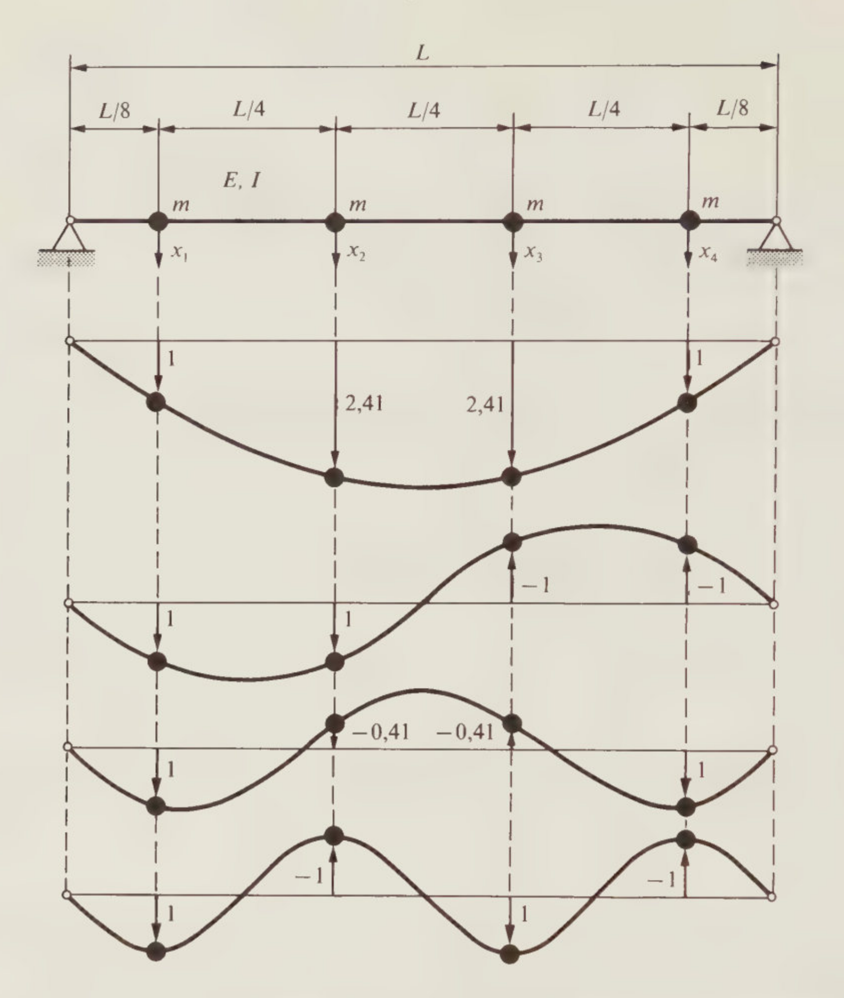


Fig. 11.7 Système de quatre masses égales sur une poutre, pulsation de la fondamentale $\omega_1 = \dfrac{4{,}93}{L}\sqrt{\dfrac{E\,I}{m\,L}}$

L'équation caractéristique devient ainsi

$$\begin{vmatrix} (0{,}49-z) & 0{,}95 & 0{,}81 & 0{,}31 \\ 0{,}95 & (2{,}25-z) & 2{,}07 & 0{,}81 \\ 0{,}81 & 2{,}07 & (2{,}25-z) & 0{,}95 \\ 0{,}31 & 0{,}81 & 0{,}95 & (0{,}49-z) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.110}$$

Le calcul des solutions de cette équation donne

$$\begin{cases} z_1 = 5{,}04900 & \omega_1 = \dfrac{4{,}9333}{L}\sqrt{\dfrac{E\,I}{m\,L}} \\ z_2 = 0{,}32000 & \omega_2 = \ \ 3{,}97\ \omega_1 \\ z_3 = 0{,}07098 & \omega_3 = \ \ 8{,}43\ \omega_1 \\ z_4 = 0{,}04000 & \omega_4 = 11{,}2\ \ \omega_1 \end{cases} \tag{11.111}$$

On calcule ensuite les formes propres, représentées sur la figure 11.7 et dont l'orthogonalité est bien vérifiée. Le régime libre est alors déterminé

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2{,}41 \\ 2{,}41 \\ 1 \end{Bmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \\ + \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}41 \\ -0{,}41 \\ 1 \end{Bmatrix} X_3 \cos(\omega_3 t - \varphi_3) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} X_4 \cos(\omega_4 t - \varphi_4) \tag{11.112}$$

Il est intéressant de comparer les pulsations propres trouvées ici avec celles d'une poutre continue de même masse totale 4 m. On montre que les pulsations propres d'une telle poutre sont données par la formule

$$\omega'_n = \frac{n^2\,\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{E\,I}{\mu_1}} \tag{11.113}$$

dans laquelle μ_1 est la masse par unité de longueur et n l'ordre des modes. La série de pulsations propres est ainsi

$$\omega'_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{E\,I}{\mu_1}} \qquad \omega'_2 = 4\,\omega'_1 \qquad \omega'_3 = 9\,\omega'_1 \qquad \omega'_4 = 16\,\omega'_1 \ \ \ldots \tag{11.114}$$

Si l'on considérait le système de quatre masses de la figure 11.7 comme une approximation d'une poutre continue on aurait

$$\mu_1 = \frac{4\,m}{L} \ \Rightarrow\ m = \frac{\mu_1\,L}{4} \ \Rightarrow\ \omega_1 = \frac{9{,}867}{L^2}\sqrt{\frac{E\,I}{\mu_1}} \tag{11.115}$$

En comparant (11.115) et (11.114), on voit que l'on commettrait ainsi, pour la pulsation de la fondamentale, l'erreur relative très faible suivante

1[er] mode $\qquad \varepsilon_1 = \dfrac{\omega_1 - \omega'_1}{\omega'_1} = -0{,}03\ \%$

De même, l'erreur relative pour la pulsation des autres modes serait

2ème mode $\varepsilon_2 = -\ 0{,}73\ \%$

3ème mode $\varepsilon_3 = -\ 6{,}32\ \%$

4ème mode $\varepsilon_4 = -29{,}8\ \%$

L'erreur relative augmente rapidement avec l'ordre des modes, elle est voisine de $-30\ \%$ pour le quatrième. Ceci est facile à comprendre; les déformées dynamiques du système discrétisé s'écartent d'autant plus de celles de la poutre continue que le nombre des forces d'inertie (une par masse ponctuelle) est petit sur chaque ondulation. Ce nombre est de quatre pour la première forme propre et de un pour la quatrième.

Les formes propres d'une poutre continue uniforme sur deux appuis sont des sinusoïdes pures. On remarque que la première forme propre du système de quatre masses est une demi-sinusoïde presque exacte.

Quotient de Rayleigh

Dans le cas particulier examiné, le vecteur propre fondamental a pour expression

$$\boldsymbol{\beta}_1^T = \{1 \quad 2{,}41 \quad 2{,}41 \quad 1\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} = \frac{2{,}41}{1} = 2{,}41 \qquad (11.116)$$

Supposons que l'on ait choisi, pour calculer le quotient de Rayleigh, le vecteur approché suivant

$$\boldsymbol{u}^T = \{1\ 2\ 2\ 1\} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2{,}00 \qquad (11.117)$$

C'est une approximation assez grossière; en effet, l'erreur relative commise peut être estimée ainsi

$$\varepsilon' = \frac{2{,}00 - 2{,}41}{2{,}41} = -17\ \%$$

Calculons une valeur approchée ω_a de la pulsation fondamentale au moyen de la relation (11.89)

$$\omega_a^2 = R(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T\,[a]\,[M]\,\boldsymbol{u}} = \frac{N}{D}$$

On détermine d'abord la valeur du numérateur d'après (11.117)

$$N = \{1\ 2\ 2\ 1\}\begin{Bmatrix}1\\2\\2\\1\end{Bmatrix} = 10$$

puis celle du dénominateur en utilisant les matrices $[M] = m \, [\ulcorner I \lrcorner]$ et $[a]$ donnée par (11.107)

$$D = \{1 \; 2 \; 2 \; 1\} \, [a] \, m \, [\ulcorner I \lrcorner] \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{m \, L^3}{122{,}88 \, E \, I} \cdot 50{,}24$$

On obtient donc

$$\omega_a^2 = 122{,}88 \, \frac{E \, I}{m \, L^3} \, \frac{10}{50{,}24} = 24{,}46 \, \frac{E \, I}{m \, L^3}$$

$$\omega_a = 4{,}946 \, \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E \, I}{m \, L}}$$

L'erreur relative faite sur la valeur propre fondamentale est alors

$$\varepsilon'' = \frac{\omega_a^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} = \frac{24{,}46 - 24{,}33}{24{,}33} = 0{,}53 \; \%$$

Conformément à la théorie, les résultats ci-dessus montrent que la pulsation propre approchée est plus grande que la valeur propre exacte et que si ε' est du premier ordre, ε'' est du second ordre, $\varepsilon'' = 0{,}031 \; | \varepsilon' |$.

Enfin, sur la pulsation propre elle-même, l'erreur relative est encore plus faible

$$\varepsilon'' = \frac{\omega_a - \omega_1}{\omega_1} = \frac{4{,}946 - 4{,}933}{4{,}933} = 0{,}26 \; \%$$

On aurait pu, bien entendu, choisir pour $\boldsymbol{u}$ une approximation plus fine que (11.117). Deux possibilités viennent immédiatement à l'esprit:

– la première forme propre est une sinusoïde soit, avec la normalisation $u_1 = 1$,

$$\boldsymbol{u}^T = \{1 \quad 2{,}414 \quad 2{,}414 \quad 1\} \tag{11.118}$$

– la première forme propre est la déformée statique après normalisation, c'est-à-dire

$$u_i = \sum_j^4 a_{ij} \, / \, \sum_j^4 a_{1j}$$

d'où

$$\boldsymbol{u}^T = \{1 \quad 2{,}375 \quad 2{,}375 \quad 1\} \tag{11.119}$$

Dans ces deux cas, on vérifie que l'erreur relative sur la pulsation propre devient tout à fait négligeable ($\varepsilon'' < 0{,}01 \; \%$).

11.6.4 Etude du comportement d'une table de fraisage

La figure 11.8 schématise l'ensemble des éléments mobiles d'une table de fraisage de petite taille.

La table proprement dite, de masse m_t, est entraînée par un moteur à courant continu d'inertie J_m, au moyen d'une courroie crantée et d'une vis à billes de pas t. L'inertie de chacune des poulies, identiques, supportant la courroie est désignée par J_p et l'inertie propre de la vis, de masse m_v, par J_v. Soit encore k_c la rigidité en traction de la courroie, k_b et k_e les rigidités respectivement de la butée et de l'écrou. La vis elle-même subit des efforts de traction-compression et de torsion que nous supposons découplés. Désignons par k_{vc} et k_{vt} les rigidités correspondantes.

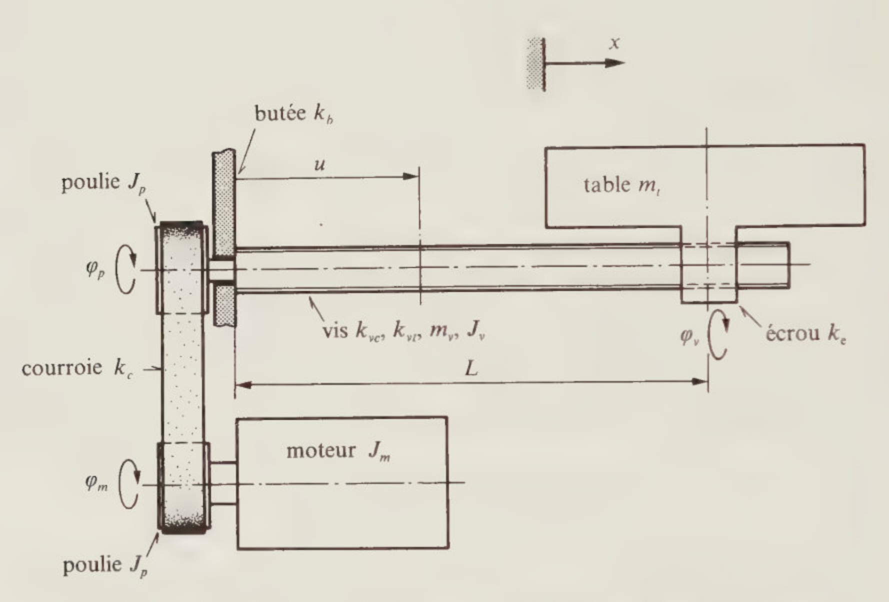


Fig. 11.8 Schéma de l'ensemble des masses mobiles d'une table de fraisage.

La mise en équation du système peut être faite au moyen des coordonnées généralisées suivantes,

x déplacement linéaire de la table,
φ_v rotation de la vis au droit de l'écrou,
φ_p rotation de la poulie en bout de vis,
φ_m rotation de la poulie moteur.

Ce choix sous-entend que l'arbre moteur est considéré comme indéformable tout comme les poulies. L'origine des coordonnées généralisées correspond à la position de repos du système.

En définissant encore la longueur active L de la vis, le rapport de transmission $a = t/2\pi$ au droit de l'écrou et le rayon R_p des poulies, nous pouvons calculer les énergies cinétique et potentielle du système afin d'en établir les équations différentielles par la méthode de Lagrange.

Energie cinétique

- Table

$$T_t = \frac{1}{2} m_t \dot{x}^2$$

- Vis en translation
  Pour la vis, on admet que les vitesses longitudinale et angulaire varient linéairement d'une extrémité à l'autre. Il vient ainsi, u étant la variable auxiliaire indiquée sur la figure

$$T_{vt} = \frac{1}{2} \frac{m_v}{L} \int_0^L \left(\frac{u}{L} (\dot{x} - a\, \dot{\varphi}_v) \right)^2 \mathrm{d}u$$

$$T_{vt} = \frac{1}{2} \frac{m_v}{3} (\dot{x} - a\, \dot{\varphi}_v)^2$$

- Vis en rotation

$$T_{vr} = \frac{1}{2} \frac{J_v}{L} \int_0^L \left(\dot{\varphi}_p + \frac{u}{L} (\dot{\varphi}_v - \dot{\varphi}_p) \right)^2 \mathrm{d}u$$

$$T_{vr} = \frac{1}{2} \frac{J_v}{3} (\dot{\varphi}_p^2 + \dot{\varphi}_v^2 + \dot{\varphi}_p\, \dot{\varphi}_r)$$

- Poulie en bout de vis

$$T_p = \frac{1}{2} J_p\, \dot{\varphi}_p^2$$

- Moteur et poulie motrice

$$T_m = \frac{1}{2} (J_m + J_p)\, \dot{\varphi}_m^2$$

L'énergie cinétique totale est alors, en négligeant l'énergie cinétique dans la courroie

$$T = T_t + T_{vt} + T_{vr} + T_p + T_m$$

Il vient donc, en additionnant les résultats précédents,

$$T = \frac{1}{2}\Big(m_t \dot{x}^2 + \frac{m_v}{3} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_v)^2 + \frac{J_v}{3} (\dot{\varphi}_p^2 + \dot{\varphi}_v^2 + \dot{\varphi}_p\, \dot{\varphi}_v) + J_p\, \dot{\varphi}_p^2 + (J_m + J_p)\, \dot{\varphi}_m^2 \Big) \tag{11.120}$$

Energie potentielle

- Traction-compression de la vis en tenant compte des rigidités de la butée et de l'écrou

$$V_{vc} = \frac{1}{2} k \, (x - a \, \varphi_v)^2$$

Dans cette expression, k est la rigidité équivalente ainsi définie,

$$k = \left(\frac{1}{k_{vc}} + \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_e} \right)^{-1} \tag{11.121}$$

- Torsion de la vis

$$V_{vt} = \frac{1}{2} k_{vt} \, (\varphi_v - \varphi_p)^2$$

- Traction dans la courroie

$$V_c = \frac{1}{2} k_c \, R_p^2 \, (\varphi_p - \varphi_m)^2$$

L'énergie potentielle totale est la somme

$$V = V_{vc} + V_{vt} + V_c$$

qui a pour valeur, en introduisant les expressions trouvées,

$$V = \frac{1}{2} \left(k (x - a \, \varphi_v)^2 + k_{vt} (\varphi_v - \varphi_p)^2 + k_c \, R_p^2 (\varphi_p - \varphi_m)^2 \right) \tag{11.122}$$

Après avoir effectué les dérivations de Lagrange à partir de (11.120) et (11.122), les équations différentielles mises sous forme matricielle s'écrivent

$$\begin{bmatrix} m_t + m_v/3 & -a \, m_v/3 & 0 & 0 \\ -a \, m_v/3 & a^2 \, m_v/3 + J_v/3 & J_v/6 & 0 \\ 0 & J_v/6 & J_v/3 + J_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p + J_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi}_r \\ \ddot{\varphi}_p \\ \ddot{\varphi}_m \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k & -a \, k & 0 & 0 \\ -a \, k & a^2 \, k + k_{vt} & -k_{vt} & 0 \\ 0 & -k_{vt} & k_{vt} + k_c \, R_p^2 & -k_c \, R_p^2 \\ 0 & 0 & -k_c \, R_p^2 & k_c \, R_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_v \\ \varphi_p \\ \varphi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11.123}$$

Le système différentiel étant établi, il faut poursuivre le calcul en introduisant les valeurs numériques des éléments de la table de fraisage étudiée.

Valeurs numériques

- Vis à billes

$m_v = 4$ kg $\quad t = 5 \cdot 10^{-3}$ m

$J_v = 4{,}34 \cdot 10^{-4}$ kgm^2 $\quad d = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ m

$L = 0{,}7$ m $\quad E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2

$G = 0{,}8 \cdot 10^{11}$ N/m^2

On peut ainsi calculer

$a = t/2\pi = 7{,}96 \cdot 10^{-4}$ m

$$k_{vc} = \frac{E}{L}\frac{\pi\, d^2}{4} = 1.98 \cdot 10^8 \text{ N/m}$$

$$k_{vt} = \frac{G}{L}\frac{\pi\, d^4}{32} = 7{,}94 \cdot 10^3 \text{ Nm/rad}$$

- Butée $k_b = 2{,}8 \cdot 10^9$ N/m (mesurée)
- Ecrou $k_e = 9{,}2 \cdot 10^8$ N/m (mesurée)
- Rigidité équivalente d'après (11.121), $k = 1{,}54 \cdot 10^8$ N/m
- Courroie $k_c = 10^6$ N/m (mesurée)
- Poulie $R_p = 4{,}3 \cdot 10^{-2}$ m $\quad k_c\, R_p^2 = 1{,}85 \cdot 10^3$ Nm/rad

  $J_p = 1{,}45 \cdot 10^{-3}$ kgm^2
- Masse de la table $m_t = 170$ kg
- Inertie du moteur $J_m = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ kgm^2

Avec les valeurs ci-dessus, les matrices du système deviennent

$$[M] = \begin{bmatrix} 1{,}713 \cdot 10^2 & -1{,}061 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -1{,}061 \cdot 10^{-3} & 1{,}455 \cdot 10^{-4} & 7{,}233 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 7{,}233 \cdot 10^{-5} & 1{,}595 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}850 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \qquad (11.124)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1{,}540 \cdot 10^8 & -1{,}225 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -1{,}225 \cdot 10^5 & 8{,}038 \cdot 10^3 & -7{,}940 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -7{,}940 \cdot 10^3 & 9{,}789 \cdot 10^3 & -1{,}849 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & -1{,}849 \cdot 10^3 & 1{,}849 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \qquad (11.125)$$

On calcule ensuite les valeurs, pulsations et fréquences propres

$$\begin{cases} \delta_1 = 0 & \omega_1 = 0 & f_1 = 0 \\ \delta_2 = 8{,}722 \cdot 10^5 \text{ s}^{-2} & \omega_2 = 9{,}339 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1} & f_2 = 148 \text{ Hz} \\ \delta_3 = 1{,}696 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2} & \omega_3 = 1{,}302 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} & f_3 = 207 \text{ Hz} \\ \delta_4 = 6{,}683 \cdot 10^7 \text{ s}^{-2} & \omega_4 = 8{,}175 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} & f_4 = 1301 \text{ Hz} \end{cases} \tag{11.126}$$

Ces résultats montrent qu'il existe un mode à fréquence nulle, c'est-à-dire un *mode flottant* (ou mode *corps rigide*) sur lequel nous allons revenir ci-après.

La matrice de changement de base $[B]$, constituée des vecteurs modaux $\boldsymbol{\beta}_p$, normalisée de manière que $[B]^T [M] [B] = [\,^\backslash I_\backslash]$, s'écrit alors

$$[B] = \begin{bmatrix} 1{,}144 \cdot 10^{-2} & 7{,}379 \cdot 10^{-2} & 1{,}614 \cdot 10^{-2} & 3{,}680 \cdot 10^{-4} \\ 1{,}437 \cdot 10^{1} & 2{,}754 & -1{,}825 \cdot 10^{1} & -8{,}052 \cdot 10^{1} \\ 1{,}437 \cdot 10^{1} & 1{,}601 & -1{,}787 \cdot 10^{1} & 1{,}063 \cdot 10^{1} \\ 1{,}437 \cdot 10^{1} & -4{,}649 & 1{,}108 \cdot 10^{1} & -1{,}042 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \tag{11.127}$$

Etant donné la non-homogénéité des coordonnées généralisées de départ, soit un déplacement linéaire et trois rotations, les rapports β_{ip}/β_{1p} ne sont pas adimensionnels. En effet

$$[\beta_{ip}/\beta_{1p}] = \text{rad/m}$$

Remarquons encore que le vecteur modal correspondant au mode flottant fait apparaître les rapports

$$\beta_{ip}/\beta_{1p} = \frac{1}{a}$$

Ceci confirme le fait que ce mode représente un simple glissement du système, sans mise en jeu d'énergie de déformation.

Il faut encore relever que dans l'exemple examiné, la plus basse fréquence propre non nulle, c'est-à-dire f_2, est déterminée presque uniquement par la rigidité k, relativement faible, de l'ensemble butée – vis à billes – écrou. En effet, on obtient une valeur très voisine de f_2 en considérant cette rigidité et la masse de la table comme un oscillateur élémentaire

$$f_2' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_t}} = 151 \text{ Hz}$$

Ce résultat montre que pour améliorer le comportement vibratoire d'une table de fraisage, donc en particulier pour augmenter la plus basse des fréquences propres, il faut avant tout rechercher une rigidité aussi grande que possible de l'ensemble butée – vis à billes - écrou. Les possibilités de diminuer la masse de la table sont plus limitées.

Suppression du mode flottant

Quand on sait a priori qu'un système est semi-défini, c'est-à-dire quand on connaît le vecteur propre glissant, il est toujours possible de supprimer une des coordonnées généralisées, ce qui fait disparaître la pulsation propre nulle. On obtient ainsi un nouveau système, dont l'ordre est abaissé d'une unité, mais qui est défini.

Supposons que dans l'exemple précédent nous ayons remarqué que

$$[K] \begin{Bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{11.128}$$

Nous aurions alors pu dire que ce vecteur était le vecteur propre $\boldsymbol{\beta}_0$ d'un mode à pulsation nulle. En utilisant la relation d'orthogonalité des modes propres, il vient

$$\boldsymbol{\beta}_0^T \, [M] \, \boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{0} \tag{11.129}$$

Ne connaissant pas encore les $\boldsymbol{\beta}_r$, on peut écrire

$$\boldsymbol{\beta}_r^T = \{x \; \varphi_v \; \varphi_p \; \varphi_m\} \tag{11.130}$$

et l'orthogonalité ci-dessus conduit à l'équation

$$a \, m_t \, x + J_v/2 \, \varphi_v + (J_p + J_v/2) \, \varphi_p + (J_p + J_m) \, \varphi_m = 0 \tag{11.131}$$

Cette relation, dérivée par rapport au temps, exprime la conservation de la quantité de mouvement du système. Par ailleurs, elle permet de tirer l'une ou l'autre des coordonnées de départ en fonction des coordonnées restantes soit, pour φ_v par exemple,

$$\varphi_v = - \frac{2 \, a \, m_t}{J_v} x - \left(1 + \frac{2 \, J_p}{J_v}\right) \varphi_p - \frac{2 \, (J_p + J_m)}{J_v} \varphi_m \tag{11.132}$$

On peut ainsi réduire l'ordre du système d'équations au moyen de la transformation

$$\begin{Bmatrix} x \\ \varphi_v \\ \varphi_p \\ \varphi_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2 \, a \, m_t}{J_v} & -\left(1 + \dfrac{2 \, J_p}{J_v}\right) & -\dfrac{2 \, (J_p + J_m)}{J_v} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_p \\ \varphi_m \end{Bmatrix} \tag{11.133}$$

Le système restant est alors d'ordre $n = 3$. En le résolvant on obtient les trois modes à pulsation non nulle.

CHAPITRE 12

RÉGIME LIBRE DE L'OSCILLATEUR GÉNÉRALISÉ DISSIPATIF

Le système d'équations différentielles du régime libre dissipatif, sous forme matricielle, est celui de la relation (10.1) avec un second membre nul

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{12.1}$$

L'existence de termes de dissipation, représentés par la matrice des pertes $[C]$, complique considérablement le problème. Selon la nature de cette matrice, nous devrons adopter des méthodes de résolution différentes. Comme au chapitre précédent, les solutions feront apparaître le concept de modes vibratoires du système oscillant.

12.1 LIMITES DE L'ANALYSE MODALE CLASSIQUE

En adoptant la même démarche qu'au paragraphe (11.3), il s'agit de déterminer le nouvel ensemble de coordonnées $q(t)$, lié à celui des $x(t)$ par la relation

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q} \tag{12.2}$$

et permettant de découpler le système différentiel (12.1).

Effectuons donc ce changement de variables. Il vient

$$[M]\,[B]\,\ddot{\boldsymbol{q}} + [C]\,[B]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [K]\,[B]\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.3}$$

Prémultiplions alors par $[B]^T$ de manière à rétablir la symétrie des matrices, d'où

$$[B]^T\,[M]\,[B]\,\ddot{\boldsymbol{q}} + [B]^T\,[C]\,[B]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [B]^T\,[K]\,[B]\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.4}$$

Afin d'alléger l'écriture, on adopte les notations

$$\begin{cases} [M'] = [B]^T\,[M]\,[B] \\ [C'] = [B]^T\,[C]\,[B] \\ [K'] = [B]^T\,[K]\,[B] \end{cases} \tag{12.5}$$

L'équation (12.4) devient

$$[M']\,\ddot{\boldsymbol{q}} + [C']\,\dot{\boldsymbol{q}} + [K']\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.6}$$

Ainsi, du fait de l'amortissement, le problème est de déterminer s'il existe une matrice $[B]$ permettant de diagonaliser simultanément non plus deux, mais trois matrices symétriques.

Si tel est le cas, le système de départ (12.1) peut alors être remplacé par un système de n équations analogues à celle d'un oscillateur élémentaire dissipatif, soit

$$m_p^o \ddot{q}_p + c_p^o \dot{q}_p + k_p^o q_p = 0 \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{12.7}$$

Revenons à l'équation (12.6) en la prémultipliant par $[M']^{-1}$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + [M']^{-1}[C'] \dot{\boldsymbol{q}} + [M']^{-1}[K'] \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.8}$$

Si la possibilité de diagonaliser simultanément $[M']$, $[C']$ et $[K']$ existe, les matrices $[M']^{-1}[C']$ et $[M']^{-1}[K']$ de (12.8) sont diagonales et leur produit est commutatif

$$[M']^{-1}[C'] [M']^{-1}[K'] = [M']^{-1}[K'] [M']^{-1}[C'] \tag{12.9}$$

Compte tenu des relations (12.5), l'égalité ci-dessus prend la forme

$$[B]^{-1}[M]^{-1}[C] [M]^{-1}[K] [B] = [B]^{-1}[M]^{-1}[K] [M]^{-1}[C] [B] \tag{12.10}$$

En prémultipliant les deux membres par $[M]$ $[B]$ et en les postmultipliant par $[B]^{-1}$, on obtient finalement

$$[C] [M]^{-1}[K] = [K] [M]^{-1}[C] \tag{12.11}$$

Cette relation, dite *condition de Caughey* [1], est nécessaire et suffisante pour que le système de départ (12.1) puisse être découplé, c'est-à-dire ramené aux n équations élémentaires (12.7), au moyen d'un changement de base défini par la matrice $[B]$, constante et réelle.

Lorsque la condition de Caughey est satisfaite, la démarche de la section 11.3 est applicable et les solutions du système différentiel (12.1) comportent, ainsi que nous l'établirons à la section suivante, *n modes vibratoires* amortis, qualifiés de *classiques* ou *réels*. Dans le cas contraire, le changement de base doit s'effectuer dans un autre espace, appelé *espace des phases*, la matrice $[B]$ est complexe et de dimension $2n$. La formulation du problème est alors établie au moyen de la *mécanique hamiltonienne* ou de la *transformation de Duncan* (section 12.5).

On peut montrer par ailleurs [1] que la condition (12.11) est satisfaite si la matrice d'amortissement répond à la condition suivante, suffisante mais non nécessaire,

$$[M']^{-1}[C'] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[[M']^{-1}[K']\right]^i \tag{12.12}$$

Dans cette relation n est l'ordre des matrices $[M]$, $[C]$, $[K]$ et les a_i sont des coefficients réels quelconques. A titre d'exemple, considérons le cas où seuls a_0 et a_1 sont différents de zéro

$$[M']^{-1}[C'] = a_0 \lceil I \rfloor + a_1 [M']^{-1}[K']$$

Prémultiplions par $[M']$ et revenons aux matrices de départ au moyen des relations (12.5), alors

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \tag{12.13}$$

On obtient ainsi une matrice de dissipation correspondant au *frottement proportionnel*.

Pour des frottements faisant intervenir des valeurs de i supérieures à 1, on détermine d'abord la matrice de changement de base au sens de la section 11.3. Ensuite, on vérifie si la condition (12.11) est satisfaite, ou on tente la décomposition de $[C]$ selon la relation (12.12).

12.2 RÉGIME LIBRE DISSIPATIF AVEC MODES RÉELS

La condition de Caughey (12.11) étant supposée satisfaite, la matrice de changement de base $[B]$ déterminée à la section 11.3 diagonalise simultanément $[M]$, $[C]$ et $[K]$.

Le système différentiel (12.4) prend la forme

$$\lceil M^o \rfloor \, \ddot{\boldsymbol{q}} + \lceil C^o \rfloor \, \dot{\boldsymbol{q}} + \lceil K^o \rfloor \, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad (12.14)$$

Il comporte 3 matrices diagonales ainsi définies

$$\begin{aligned} \lceil M^o \rfloor &= [B]^T [M] [B] \\ \lceil C^o \rfloor &= [B]^T [C] [B] \\ \lceil K^o \rfloor &= [B]^T [K] [B] \end{aligned} \qquad (12.15)$$

Ce système est constitué de n équations indépendantes analogues à celle d'un oscillateur élémentaire linéaire dissipatif (12.7)

$$m_p^o \, \ddot{q}_p + c_p^o \, \dot{q}_p + k_p^o \, q_p = 0 \qquad p = 1, 2, ..., n$$

puis, en divisant par la masse,

$$\ddot{q}_p + \frac{c_p^o}{m_p^o} \dot{q}_p + \frac{k_p^o}{m_p^o} q_p = 0 \qquad p = 1, 2, ..., n \qquad (12.16)$$

Définissons encore les grandeurs

$$\begin{cases} \omega_{0p}^2 = \dfrac{k_p^o}{m_p^o} \\ 2\,\lambda_p = \dfrac{c_p^o}{m_p^o} \end{cases} \qquad (12.17)$$

qui sont respectivement les éléments des matrices diagonales

$$\begin{aligned} \lceil \Omega_0^2 \rfloor &= \lceil \Delta \rfloor = [B]^{-1}[M]^{-1}[K] [B] \\ \lceil 2\Lambda \rfloor &= [B]^{-1}[M]^{-1} [C] [B] \end{aligned} \qquad (12.18)$$

Il vient finalement

$$\ddot{q}_p + 2\,\lambda_p \, \dot{q}_p + \omega_{0p}^2 \, q_p = 0 \qquad p = 1, 2, ..., n \qquad (12.19)$$

Pour un tel système, les deux matrices (12.18) sont déterminées sur la base d'un calcul aux valeurs propres, au sens de la section 11.3, à partir des matrices $[M]$ et

$[K]$, ou des matrices $[M]$ et $[C]$. Par analogie avec l'oscillateur élémentaire, la grandeur λ_p est appelée *coefficient d'amortissement modal* et le rapport

$$\eta_p = \frac{\lambda_p}{\omega_{0p}} \qquad (12.20)$$

amortissement relatif modal ou *facteur d'amortissement modal.*

L'intégration des équations (12.19) donne immédiatement

$$q_p = Q_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad p = 1, 2, ..., n \qquad (12.21)$$

ω_p étant la *pulsation propre avec amortissement* ainsi définie

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{0p}^2 - \lambda_p^2} = \omega_{0p} \sqrt{1 - \eta_p^2} \qquad (12.22)$$

Revenons maintenant aux coordonnées initiales du système au moyen de (12.2)

$$\boldsymbol{x} = [B] \, \boldsymbol{q}$$

On obtient comme précédemment

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p \, q_p$$

puis, en utilisant (12.21)

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p \, Q_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \qquad (12.23)$$

Les composantes des vecteurs $\boldsymbol{B}_p$ n'étant définies qu'à un facteur près, on peut adopter, comme précédemment, le changement d'écriture $\boldsymbol{B}_p \, Q_p = \boldsymbol{\beta}_p \, X_p$, d'où finalement

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \underbrace{\boldsymbol{\beta}_p \, X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p)}_{\text{mode propre de rang } p} \qquad (12.24)$$

Les vecteurs propres $\boldsymbol{\beta}_p$ de la matrice $[B]$ sont identiques à ceux de la section 11.3, possèdent les mêmes propriétés d'orthogonalité et peuvent être normalisés de la même manière.

En résumé, quand la condition de Caughey est satisfaite, les solutions du système dissipatif ont, à l'amortissement près, la même structure que celles du système conservatif. L'amortissement relatif est différent pour chaque mode propre.

12.3 RÉPONSE À UNE EXCITATION INITIALE DANS LE CAS DE MODES RÉELS

Pour un lâcher avec des conditions initiales quelconques

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_0 \qquad (12.25)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{V}_0 \qquad (12.26)$$

la solution (12.24) conduit aux relations

$$\boldsymbol{X}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p \cos \varphi_p \tag{12.27}$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \sum_p^n \boldsymbol{\beta}_p X_p (\omega_p \sin \varphi_p - \lambda_p \cos \varphi_p) \tag{12.28}$$

En prémultipliant ces équations par $\boldsymbol{\beta}_r^T [M]$ et en utilisant les relations d'orthogonalité (11.58), encore valables ici, il vient

$$X_r \cos \varphi_r = \frac{1}{m_r^o} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{X}_0 \tag{12.29}$$

$$X_r (\omega_r \sin \varphi_r - \lambda_r \cos \varphi_r) = \frac{1}{m_r^o} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \boldsymbol{V}_0$$

puis, en isolant $X_r \sin \varphi_r$ dans cette dernière relation

$$X_r \sin \varphi_r = \frac{1}{m_r^o \omega_r} \boldsymbol{\beta}_r^T [M] \{ \boldsymbol{V}_0 + \lambda_r \boldsymbol{X}_0 \} \tag{12.30}$$

La réponse du système peut alors s'écrire

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \, \mathrm{e}^{-\lambda_p t} \left(\boldsymbol{\beta}_p^T [M] \boldsymbol{X}_0 \cos \omega_p t + \frac{1}{\omega_p} \boldsymbol{\beta}_p^T [M] \{ \boldsymbol{V}_0 + \lambda_p \boldsymbol{X}_0 \} \sin \omega_p t \right) \tag{12.31}$$

Enfin, on vérifie facilement que les conditions initiales devant être choisies pour isoler un mode de vibrations sont, elles aussi, analogues à celles exposées à la section 11.3.

12.4 CAS GÉNÉRAL

Revenons à l'équation (12.1)

$$[M] \ddot{\boldsymbol{x}} + [C] \dot{\boldsymbol{x}} + [K] \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

et cherchons une solution du type

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} \mathrm{e}^{-\delta t}$$

ou, au sens de la section 11.3

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \mathrm{e}^{-\delta t} \tag{12.32}$$

En introduisant cette solution dans l'équation différentielle, on obtient

$$[\delta^2 [M] - \delta [C] + [K]] \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

Afin de simplifier l'écriture, écrivons

$$[N] = [\delta^2 [M] - \delta [C] + [K]] \tag{12.33}$$

Il vient ainsi

$$[N]\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{12.34}$$

La matrice $[N]$, fonction de δ, est carrée et symétrique. Le système homogène (12.34) n'a de solutions non triviales que si son déterminant est nul, soit

$$|\,\delta^2\,[M] - \delta\,[C] + [K]\,| = 0 \tag{12.35}$$

Cette relation appelée *équation caractéristique* comme les relations similaires rencontrées précédemment, est d'ordre $2n$ en δ. Ses racines peuvent être réelles, complexes ou imaginaires pures.

- Les *racines réelles* sont nécessairement positives et correspondent à des déplacements apériodiques décroissants. Si toutes les racines sont de ce type, le système n'appartient plus à la mécanique vibratoire.
- Les *racines complexes* sont conjuguées par paires, avec une partie réelle positive. Les vecteurs modaux qui leur sont attachés sont également complexes conjugués et correspondent, après combinaison, à des modes oscillatoires amortis.
- Les *racines imaginaires pures*, conjuguées par paires, correspondent à des modes oscillatoires conservatifs. L'existence de tels modes, rare en pratique, n'est possible que pour certaines configurations très particulières de la matrice d'amortissement $[C]$.

Nous allons supposer pour la suite que toutes les racines sont complexes. En effet, les racines imaginaires pures n'en sont qu'un cas particulier alors que les racines réelles ne présentent guère d'intérêt en analyse modale. De plus, afin de simplifier l'écriture, les grandeurs complexes ne seront plus soulignées, contrairement à la convention adoptée pour les chapitres 5 et 6. A ce stade de l'exposé, en effet, le lecteur reconnaîtra sans difficulté la nature des grandeurs utilisées.

En supposant que toutes les valeurs propres sont distinctes, écrivons une solution particulière du système différentiel

$$\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{B}_p\,\mathrm{e}^{-\delta_p t} \tag{12.36}$$

Le vecteur-colonne complexe $\boldsymbol{B}_p$ est un vecteur modal du système. Il est égal à l'un des vecteurs-colonne non nul de la matrice adjointe de $[N]$, dans laquelle on a remplacé δ par δ_p.

La solution générale du système s'obtient par combinaison linéaire des solutions (12.36).

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^{2n} \gamma_p\,\boldsymbol{x}_p = \sum_p^{2n} \gamma_p\,\boldsymbol{B}_p\,\mathrm{e}^{-\delta_p t} \tag{12.37}$$

Les constantes arbitraires γ_p sont complexes dans le cas général. Sous forme matricielle, on peut écrire

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\{\gamma_p\,\mathrm{e}^{-\delta_p t}\} \tag{12.38}$$

La matrice $[B]$ ne peut pas être utilisée pour un changement de base du type

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q}$$

car elle est rectangulaire, d'ordre $n \times 2n$, ce qui rend impossible la transformation réciproque (en particulier, ceci empêche de résoudre les problèmes de régimes forcés).

La meilleure façon de surmonter cette difficulté est de convertir le système lagrangien de n équations différentielles du second ordre en un système équivalent de $2n$ équations différentielles du premier ordre, appelées *équations canoniques de Hamilton*. Les n variables auxiliaires sont alors les quantités de mouvement généralisées p_i telles que

$$\boldsymbol{p} = [M]\,\dot{\boldsymbol{x}} \tag{12.39}$$

12.5 ÉQUATIONS DE HAMILTON DU SYSTÈME

La fonction de Lagrange – ou Lagrangien – est la différence entre les énergies cinétique et potentielle

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}\,(x, \dot{x}, t) = (T - V) \tag{12.40}$$

On sait que les équations de la dynamique du système sont données par les dérivées suivantes (équations de Lagrange)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n \tag{12.41}$$

Les quantités de mouvement généralisées (12.39) sont par définition

$$p_k = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_k} \qquad k = 1, \ldots, n \tag{12.42}$$

Rappelons que la mécanique hamiltonienne, sur le plan historique, a été développée à partir de systèmes conservatifs, comme la mécanique lagrangienne d'ailleurs. Nous établirons dès lors les équations de Hamilton pour de tels systèmes puis nous procéderons aux adaptations nécessaires à la généralisation de ces équations aux systèmes dissipatifs.

Utilisons la *transformée duale de Legendre* [15] de manière à passer d'une description de la dynamique du système en fonction des variables $(x, \dot{x}, t)$ à une description en fonction des variables (x, p, t).

On définit pour cette transformation une nouvelle fonction

$$\mathrm{H} = \sum_{k}^{n} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_k}\,\dot{x}_k - \mathrm{L} \tag{12.43}$$

qui devient, compte tenu de (12.42)

$$\mathrm{H} = \sum_{k}^{n} p_k\,\dot{x}_k - \mathrm{L} \tag{12.44}$$

Il s'agit alors de remplacer les vitesses généralisées $\dot{x}_p$ par les quantités de mouvement correspondantes de façon que

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}(x, p, t) \tag{12.45}$$

Pour cela, exprimons d'abord la variation de H sous sa forme (12.44)

$$\delta \mathrm{H} = \sum_{k}^{n} \left(\dot{x}_k \, \delta p_k + p_k \, \delta \dot{x}_k - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_k} \, \delta x_k - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_k} \, \delta \dot{x}_k \right) \tag{12.46}$$

La définition (12.42) permet de simplifier l'expression précédente

$$\delta \mathrm{H} = \sum_{k}^{n} \left(\dot{x}_k \, \delta p_k - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_k} \, \delta x_k \right) \tag{12.47}$$

Exprimée à partir de l'équation (12.45), cette même variation $\delta \mathrm{H}$ prend la forme

$$\delta \mathrm{H} = \sum_{k}^{n} \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} \, \delta x_k + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \, \delta p_k \right) \tag{12.48}$$

En comparant les deux expressions ci-dessus, on peut écrire

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.49}$$

$$-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.50}$$

Les équations (12.49) et (12.50) ont pour seule origine la transformation de Legendre. En utilisant les équations de la dynamique (12.41), on obtient

$$\dot{p}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_k} \right) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_k} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.51}$$

Les équations (12.50) deviennent alors

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.52}$$

Les deux ensembles d'équations (12.49) et (12.52), à savoir

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} \end{cases} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.53}$$

constituent un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre, appelées *équations canoniques de Hamilton.*

La fonction de Hamilton, ou Hamiltonien, fournit une description complète du mouvement puisque toutes les équations différentielles de ce mouvement peuvent en être déduites.

L'avantage des équations de Hamilton sur celles de Lagrange réside dans le fait que les dérivées temporelles n'apparaissent que dans les membres de gauche.

Rappelons que les n premières équations (12.53) résultent de la transformation de Legendre et de la définition du Hamiltonien, alors que les n suivantes sont la transcription des lois de la dynamique qui gouvernent le mouvement.

En présence de forces non-conservatives dérivant de la fonction de dissipation W de Rayleigh, les équations de Hamilton deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial W}{\partial \dot{x}_k} \end{cases} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.54}$$

Dans le cas le plus simple et le plus courant où l'énergie cinétique se réduit à la forme quadratique définie positive des vitesses généralisées $\dot{x}_k$, la fonction de Hamilton a pour valeur

$$\mathrm{H} = T + V \tag{12.55}$$

Quand les énergies cinétique et potentielle ont respectivement les valeurs (10.2) et (10.3) du chapitre 10, le Lagrangien devient

$$\mathrm{L} = T - V = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [M]\, \dot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T [K]\, \boldsymbol{x} \tag{12.56}$$

D'autre part les quantités de mouvement généralisées (12.42) ont pour expression

$$\boldsymbol{p} = [M]\, \dot{\boldsymbol{x}} \tag{12.57}$$

Ces relations permettent de calculer la fonction de Hamilton (12.44)

$$\mathrm{H} = \boldsymbol{p}^T \dot{\boldsymbol{x}} - \mathrm{L} = \boldsymbol{p}^T \dot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [M]\, \dot{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T [K]\, \boldsymbol{x}$$

puis, en éliminant $\dot{\boldsymbol{x}}$ par (12.57),

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T [M]^{-1} \boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T [K]\, \boldsymbol{x} \tag{12.58}$$

Compte tenu la valeur (10.4) de la fonction de dissipation W, les équations de Hamilton (12.54) sont finalement

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = [M]^{-1} \boldsymbol{p} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -[K]\, \boldsymbol{x} - [C]\, \dot{\boldsymbol{x}} \end{cases} \tag{12.59}$$

Pour exprimer matriciellement les équations (12.59), il est préférable d'éviter l'inversion de la matrice des masses. On écrit donc

$$\begin{cases} [M]\,\dot{x} = p \\ \dot{p} + [C]\,\dot{x} = -[K]\,x \end{cases} \tag{12.60}$$

On peut alors, à partir de p et x d'une part, de $\dot{p}$ et $\dot{x}$ d'autre part, former de nouveaux vecteurs comportant $2n$ composantes, afin de mettre les équations précédentes sous la forme

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ \lceil I \rfloor & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lceil I \rfloor & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ x \end{Bmatrix} \tag{12.61}$$

En analyse modale, on préfère généralement traiter des équations ne comportant que les coordonnées généralisées de départ x_i et leurs dérivées. Il suffit de transformer les systèmes de $2n$ équations différentielles ci-dessus par les relations simples

$$\begin{Bmatrix} p \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & \lceil I \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \tag{12.62}$$

puis, par dérivation

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & \lceil I \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \tag{12.63}$$

Le système (12.61) prend la forme

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \tag{12.64}$$

Les matrices d'ordre $2n$ sont symétriques et constituées d'éléments qui sont eux-mêmes des matrices carrées et symétriques.

On peut noter qu'en développant le système (12.64), on obtient les deux systèmes de n équations

$$\begin{cases} [M]\,\dot{x} = [M]\,\dot{x} \\ [M]\,\ddot{x} + [C]\,\dot{x} = -[K]\,x \end{cases} \tag{12.65}$$

Le premier système d'ordre n est trivial, alors que le second représente les équations de la dynamique du système matériel.

La transformation d'un système de n équations différentielles du second ordre en un système de $2n$ équations du premier ordre par l'adjonction d'un système trivial d'ordre n a été développée par Frazer, Duncan et Collar [7], sans référence à une

formulation Hamiltonienne du problème. C'est pour cela que l'on rencontre souvent dans la littérature l'appellation de *transformation de Duncan* pour le passage du système (12.1) au système (12.64).

On voit immédiatement, en examinant (12.64) ou (12.65), que si le système est soumis à des forces extérieures $f_i(t)$ le vecteur-force d'ordre $2n$ sera

$$\boldsymbol{P}^T = \{\boldsymbol{0}^T \boldsymbol{f}^T\} \tag{12.66}$$

Dans cette expression, $\boldsymbol{0}^T$ et $\boldsymbol{f}^T$ sont respectivement les transposées du vecteur nul d'ordre n et du vecteur des forces généralisées de l'équation (10.1).

$$\boldsymbol{f}^T = \{f_1 f_2 \dots f_n\} \tag{12.67}$$

12.6 RÉSOLUTION DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

12.6.1 Changement de base · Espace des phases

Reprenons le système d'équations différentielles (12.64) et introduisons les notations suivantes afin de simplifier l'écriture,

$$[D] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \tag{12.68}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \tag{12.69}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^T = \{\dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x}^T\} \\ \dot{\boldsymbol{y}}^T = \{\ddot{\boldsymbol{x}}^T \dot{\boldsymbol{x}}^T\} \end{cases} \tag{12.70}$$

L'équation différentielle du système en régime libre devient simplement

$$[D]\,\dot{\boldsymbol{y}} + [G]\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \tag{12.71}$$

Comme les matrices d'ordre n $[M]$, $[C]$ et $[K]$, les matrices d'ordre $2n$ $[D]$ et $[G]$ sont carrées, réelles et symétriques.

De plus, la matrice des masses $[M]$ étant toujours définie positive, la matrice $[D]$ est toujours inversible, son déterminant étant égal, au signe près, au carré de celui de $[M]$

$$|\,D\,| = (-1)^n\,|\,M\,|^2 \tag{12.72}$$

Au moyen de la relation évidente $[D]\,[D]^{-1} = [\,I\,] = [D]^{-1}[D]$ il est aisé de calculer analytiquement cette matrice inverse. On obtient

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C]\,[M]^{-1} & [M]^{-1} \\ [M]^{-1} & [0] \end{bmatrix} \tag{12.73}$$

Le système différentiel (12.71), du premier ordre et de dimension $2n$, peut être résolu d'une manière analogue à celle utilisée à la section 11.3 pour le système (11.1).

La nature des matrices étant la même dans les deux cas, il est possible de découpler le système (12.71) par un changement de variables

$$\boldsymbol{y} = [B]\,\boldsymbol{q} \tag{12.74}$$

La matrice de changement de base $[B]$ est ici carrée, à coefficients constants mais complexes, et de dimension $2n$. Les coordonnées découplées q_i sont aussi au nombre de $2n$. Par dérivation on obtient

$$\dot{\boldsymbol{y}} = [B]\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{12.75}$$

En effectuant ce changement de variables dans le système de départ et en prémultipliant par $[B]^T$ afin de conserver la symétrie des produits matriciels il vient

$$[B]^T [D]\,[B]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [B]^T [G]\,[B]\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.76}$$

La démarche de la section 11.3 permet d'affirmer qu'il existe une matrice $[B]$ telle que les produits

$$[B]^T [D]\,[B] = \lceil D^o \rfloor \tag{12.77}$$

et

$$[B]^T [G]\,[B] = \lceil G^o \rfloor \tag{12.78}$$

soient des matrices diagonales. Cette matrice $[B]$ satisfait la condition

$$[B]^{-1}[D]^{-1}[G]\,[B] = \lceil \Delta \rfloor \tag{12.79}$$

On est donc ramené à un problème aux valeurs propres analogue à celui traité précédemment.

12.6.2 Problème aux valeurs propres

Le noyau du système, d'ordre $2n$, est ici

$$[F] = [D]^{-1}[G] \tag{12.80}$$

Avec cette notation, la condition de diagonalisation (12.79) se simplifie

$$[B]^{-1}[F]\,[B] = \lceil \Delta \rfloor \tag{12.81}$$

En effectuant le produit matriciel de (12.73) avec (12.69), on trouve, $\lceil I \rfloor$ étant la matrice unité d'ordre n,

$$[F] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K] \\ -\lceil I \rfloor & [0] \end{bmatrix} \tag{12.82}$$

La recherche des valeurs propres δ_p qui forment la matrice diagonale $\lceil \Delta \rfloor$ s'effectue de la manière habituelle par la résolution de l'équation caractéristique

$$|\,[F] - \delta_p \lceil I \rfloor\,| = 0 \tag{12.83}$$

Cette équation, dans laquelle $\lceil I \rfloor$ est la matrice unité d'ordre $2n$, est identique à (12.35). En remplaçant $[F]$ par sa valeur, elle s'écrit

$$\left| \begin{bmatrix} [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K] \\ -\lceil I \rfloor & [0] \end{bmatrix} - \delta_p \lceil I \rfloor \right| = 0 \tag{12.84}$$

Nous avions supposé (page 194) que toutes les racines sont complexes conjuguées

$$\begin{cases} \delta_p \; = \lambda_p + \mathrm{j}\,\omega_p \\ \delta_p^* = \lambda_p - \mathrm{j}\,\omega_p \end{cases} \tag{12.85}$$

Les $2n$ vecteurs propres $\boldsymbol{B}_p$, liés aux $2n$ valeurs propres, sont définis à un facteur près et constituent la matrice de changement de base $[B]$. Ils peuvent être obtenus, soit comme solutions des systèmes

$$[[F] - \delta_p \lceil I \rfloor]\, \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{0} \tag{12.86}$$

soit comme vecteurs-colonne des matrices adjointes de $[[F]-\delta_p \lceil I \rfloor]$. Ces vecteurs propres ne sont plus réels, comme c'était le cas jusqu'ici, mais complexes. Il est de plus facile de montrer qu'à deux valeurs propres conjuguées correspondent deux vecteurs propres conjugués car les termes de $[F]$ sont réels.

Le système (12.76) étant découplé, nous pouvons écrire, compte tenu des relations (12.77) et (12.78),

$$\lceil D^o \rfloor\, \dot{\boldsymbol{q}} + \lceil G^o \rfloor\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.87}$$

puis, en prémultipliant par $\lceil D^o \rfloor^{-1}$

$$\dot{\boldsymbol{q}} + \lceil D^o \rfloor^{-1} \lceil G^o \rfloor\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.88}$$

Comme

$$\lceil D^o \rfloor^{-1} \lceil G^o \rfloor = \lceil \Delta \rfloor \tag{12.89}$$

il vient finalement

$$\dot{\boldsymbol{q}} + \lceil \Delta \rfloor\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{12.90}$$

12.6.3 Solution générale

Le système (12.90), découplé et d'ordre $2n$, comporte $2n$ équations indépendantes

$$\dot{q}_p + \delta_p\, q_p = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, 2n \tag{12.91}$$

L'intégration des équations est alors immédiate et donne les solutions

$$q_p = Q_p\, \mathrm{e}^{-\delta_p t} \qquad p = 1, 2, \ldots, 2n \tag{12.92}$$

Les constantes d'intégration Q_p sont déterminées par les conditions initiales imposées au système.

En revenant aux coordonnées de départ au moyen de la relation (12.74) de changement de base

$$\boldsymbol{y} = [B]\, \boldsymbol{q}$$

on peut écrire

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^{2n} \boldsymbol{B}_p\, q_p \tag{12.93}$$

puis, en remplaçant les q_p par leurs valeurs

$$\boldsymbol{y} = \sum_{p}^{2n} \boldsymbol{B}_p \, Q_p \, \mathrm{e}^{-\delta_p t} \tag{12.94}$$

Par construction du système d'ordre $2n$, les composantes du vecteur $\boldsymbol{y}$ satisfont la condition

$$y_i = \frac{\mathrm{d}y_{i+n}}{\mathrm{d}t} \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{12.95}$$

Il en résulte

$$B_{ip} = -\delta_p \, B_{i+n,p} \tag{12.96}$$

On peut ordonner les $2n$ solutions de manière que la conjuguée de δ_p soit placée au rang $p+n$

$$\delta_p^* = \delta_{p+n} \tag{12.97}$$

La relation (12.94) devient ainsi

$$\boldsymbol{y} = \sum_{p}^{n} (\boldsymbol{B}_p \, Q_p \, \mathrm{e}^{-\delta_p t} + \boldsymbol{B}_p^* \, Q_{p+n} \, \mathrm{e}^{-\delta_p^* t}) \tag{12.98}$$

Ce vecteur $\boldsymbol{y}$ représentant les déplacements et vitesses du système, ses éléments sont nécessairement des quantités réelles, ce qui implique

$$(\boldsymbol{B}_p^* \, Q_{p+n}) = (\boldsymbol{B}_p \, Q_p)^*$$

et par conséquent

$$Q_{p+n} = Q_p^* \tag{12.99}$$

puis, en introduisant ce résultat dans (12.98)

$$\boldsymbol{y} = \sum_{p}^{n} (\boldsymbol{B}_p \, Q_p \, \mathrm{e}^{-\delta_p t} + \boldsymbol{B}_p^* \, Q_p^* \, \mathrm{e}^{-\delta_p^* t}) \tag{12.100}$$

Ecrivons les grandeurs complexes sous forme exponentielle

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_p = \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} & \ell = 1, 2, ..., 2n \\ \boldsymbol{B}_p^* = \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} & \ell = 1, 2, ..., 2n \end{cases} \tag{12.101}$$

$$\begin{cases} Q_p = \dfrac{1}{2} \, Y_p \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_p} \\ Q_p^* = \dfrac{1}{2} \, Y_p \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_p} \end{cases} \tag{12.102}$$

En raison de la forme particulière (12.85) des valeurs propres, il vient

$$\boldsymbol{y} = \sum_{p}^{n} \frac{1}{2} \, Y_p \, \mathrm{e}^{-\lambda_p} (\{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_p t - \psi_{\ell p} - \varphi_p)}\} + \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_p t - \psi_{\ell p} - \varphi_p)}\}) \tag{12.103}$$

et, en faisant apparaître les solutions harmoniques,

$$y = \sum_{p}^{n} e^{-\lambda_p t} \{ Y_p \beta_{\ell p} \cos(\omega_p t - \psi_{\ell p} - \varphi_p) \} \qquad \ell = 1, 2, ..., 2n \qquad (12.104)$$

ou encore

$$y = \sum_{p}^{n} \{ \beta_{\ell p} Y_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{\ell p} - \varphi_p) \}$$

Le vecteur $\boldsymbol{y}$ étant composé des vitesses et des déplacements, les n dernières composantes de (12.104) suffisent à décrire le mouvement du système. Dès lors, en modifiant comme suit l'écriture

$$i = \ell - n \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, ..., n$$
$$X_p = Y_p$$

l'équation du mouvement – *régime libre dissipatif avec modes complexes* devient finalement

$$\boldsymbol{x} = \sum_{p}^{n} \{ \beta_{ip} X_p e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{ip} - \varphi_p) \} \qquad (12.105)$$

La comparaison de (12.105) et (12.24) met en évidence le fait que lorsque l'amortissement du système ne satisfait pas la condition de Caughey il apparaît, pour un mode propre donné, non seulement des amplitudes β_{ip} différentes pour chaque coordonnée x_i du système mais aussi des déphasages différents ψ_{ip}.

Une forme propre n'est plus alors, comme dans un système conservatif, une configuration statique du système liée à une valeur propre. Elle doit être définie comme une *configuration dans l'espace des phases, liée à une valeur propre*. Cet espace est constitué des déplacements généralisés et des vitesses généralisées.

D'autre part, on appelle *facteur d'amortissement modal* ou *amortissement relatif modal* le nombre pur ainsi défini,

$$\eta_p = \frac{\mathrm{Re}(\delta_p)}{|\delta_p|} = \frac{\lambda_p}{\sqrt{\lambda_p^2 + \omega_p^2}} \qquad (12.106)$$

Il est équivalent à celui de l'oscillateur élémentaire, qui avait pour valeur

$$\eta = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}}$$

12.6.4 Orthogonalité des vecteurs modaux · Normalisation

Les directions des coordonnées y_i, c'est-à-dire celles des coordonnées $\dot{x}_i$ et x_i, sont linéairement indépendantes. Elles constituent une base de l'espace des phases, de dimension $2n$. Les vecteurs modaux complexes $\boldsymbol{B}_p$ constituent une autre base de cet espace.

Comme précédemment, l'indépendance linéaire des vecteurs modaux est exprimée par une relation de la forme

$$\sum_{p}^{2n} \gamma_p \boldsymbol{B}_p \neq \boldsymbol{0} \qquad (12.107)$$

où les γ_p sont des constantes arbitraires, ici complexes. La propriété d'orthogonalité des vecteurs modaux, nécessaire à la démonstration de (12.107), est également réalisée dans le cas d'un système dissipatif. En effet, la diagonalisation de $[D]$ et $[G]$ avait conduit aux relations (12.77) et (12.78)

$$[B]^T [D] [B] = \lceil D^o \rfloor$$

$$[B]^T [G] [B] = \lceil G^o \rfloor$$

En faisant apparaître les vecteurs-colonne $\boldsymbol{B}_p$ de $[B]$, on peut écrire, pour la première de ces relations:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{B}_{2n}^T \end{bmatrix} [D] [\boldsymbol{B}_1 \ldots \boldsymbol{B}_{2n}] = \begin{bmatrix} d_1^0 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & d_{2n}^0 \end{bmatrix} \tag{12.108}$$

Par identification terme à terme on en déduit les égalités, δ_{rs} étant le symbole de Kronecker

$$\boldsymbol{B}_r^T [D] \boldsymbol{B}_s = \delta_{rs} d_r^o \tag{12.109}$$

puis, en faisant de même avec la matrice $[G]$

$$\boldsymbol{B}_r^T [G] \boldsymbol{B}_s = \delta_{rs} g_r^o \tag{12.110}$$

Lorsque $r \neq s$, les relations précédentes, égales à zéro, expriment la propriété, déjà rencontrée précédemment, appelée *orthogonalité des vecteurs modaux* ou *orthogonalité des modes propres*. La différence essentielle avec les relations (11.60) et (11.61), valables pour un système conservatif ou un système dissipatif respectant la condition de Caughey, est que les vecteurs modaux ci-dessus sont complexes et de dimension $2n$.

Quand $r = s$, on retrouve les grandeurs modales, complexes et conjuguées deux à deux, qui composent les matrices $\lceil D^o \rfloor$ et $\lceil G^o \rfloor$, c'est-à-dire les termes d_r^o et g_r^o. Ce sont les pendants des masses et rigidités modales introduites au chapitre 11. Cependant, la nature des matrices $[D]$ et $[G]$ ne permet plus de leur donner une signification physique simple.

Comme les vecteurs propres sont complexes, la normalisation attribuant une longueur unité à ces vecteurs n'a plus guère de signification. En pratique, on utilise généralement la normalisation *qui rend unitaires les termes de la matrice* $\lceil D^o \rfloor$. Elle correspond à la condition

$$[B]^T [D] [B] = \lceil I \rfloor \tag{12.111}$$

12.7 RÉPONSE À UNE EXCITATION INITIALE DANS LE CAS GÉNÉRAL

Considérons un lâcher avec les conditions initiales quelconques

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{V}_0$$

Par la définition du vecteur $\boldsymbol{y}$, d'ordre $2n$, le vecteur $\boldsymbol{Y}_0$ des conditions initiales est de la forme

$$\boldsymbol{Y}_0 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}_0 \\ \boldsymbol{X}_0 \end{Bmatrix} \tag{12.112}$$

La solution générale (12.94) permet d'écrire

$$\boldsymbol{Y}_0 = \sum_p^{2n} \boldsymbol{B}_p \, Q_p \tag{12.113}$$

Les Q_p peuvent être déterminés en utilisant les relations d'orthogonalité (12.109). Prémultiplions la relation précédente par $\boldsymbol{B}_r^T \, [D]$

$$\boldsymbol{B}_r^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0 = \sum_p^{2n} \boldsymbol{B}_r^T \, [D] \, \boldsymbol{B}_p \, Q_p$$

Les termes de la somme sont tous nuls, à l'exception de celui d'indice r, soit

$$\boldsymbol{B}_r^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0 = d_r^o \, Q_r$$

et par conséquent

$$Q_r = \frac{1}{d_r^o} \boldsymbol{B}_r^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0 \tag{12.114}$$

En reportant cette expression dans la solution générale il vient

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^{2n} \frac{1}{d_p^o} (\boldsymbol{B}_p^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0) \, \boldsymbol{B}_p \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p + \mathrm{j}\omega_p)t}$$

Nous avions ordonné les solutions de manière que

$$\delta_{p+n} = \delta_p^* \qquad\qquad p = 1, 2, ..., n$$

Nous aurons pareillement

$$\boldsymbol{B}_{p+n} = \boldsymbol{B}_p^* \tag{12.115}$$

et

$$d_{p+n}^o = d_p^{o*} \tag{12.116}$$

En posant de plus

$$\boldsymbol{B}_p = \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\}$$

la solution peut se mettre sous la forme d'une somme de n termes

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^{n} \left(\frac{1}{d_p^o} (\{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\}^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0) \, \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p + \mathrm{j}\omega_p)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d_p^{o*}} (\{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\}^T \, [D] \, \boldsymbol{Y}_0) \, \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p - \mathrm{j}\omega_p)t} \right) \tag{12.117}$$

Simplifions ce résultat en modifiant l'écriture des constantes

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\, Y'_{0p}\, e^{j\varphi_{0p}} = \frac{1}{d_p^o}\, \{\beta_{\ell p}\, e^{j\psi_{\ell p}}\}^T\, [D]\, \boldsymbol{Y}_0 \\ \frac{1}{2}\, Y'_{0p}\, e^{-j\varphi_{0p}} = \frac{1}{d_p^{o*}}\, \{\beta_{\ell p}\, e^{-j\psi_{\ell p}}\}^T\, [D]\, \boldsymbol{Y}_0 \end{cases} \qquad (12.118)$$

Il vient ainsi

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^n \{\beta_{\ell p}\, Y'_{0p}\, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{\ell p} - \varphi_{0p})\} \qquad (12.119)$$

On aurait pu établir ce résultat plus rapidement, une fois les coefficients Q_p déterminés, par (12.114). En effet, il était alors possible d'adopter directement la convention d'écriture (12.102).

En effectuant le même changement d'indice $i = \ell - n$ que précédemment et en remplaçant Y'_{0p} par X'_{0p}, le mouvement du système peut être décrit par le vecteur $\boldsymbol{x}$ ne comportant que n composantes

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \{\beta_{ip}\, X'_{0p}\, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{ip} - \varphi_{0p})\} \qquad (12.120)$$

Le vecteur $\boldsymbol{Y}_0$ des conditions initiales étant toujours réel, la condition générale permettant d'isoler le mode de rang r s'écrit

$$\boldsymbol{Y}_0 = \gamma_r\, \boldsymbol{B}_r + \gamma_r^*\, \boldsymbol{B}_r^* \qquad (12.121)$$

Dans cette expression, γ_r et γ_r^* sont deux constantes complexes conjugées qu'on peut mettre sous la forme

$$\begin{cases} \gamma_r = \frac{1}{2}\, Y'_{0r}\, e^{j\varphi_{0r}} \\ \gamma_r^* = \frac{1}{2}\, Y'_{0r}\, e^{-j\varphi_{0r}} \end{cases} \qquad (12.122)$$

Au moyen des expressions exponentielles (12.101) des vecteurs propres, la relation (12.121) devient

$$\boldsymbol{Y}_0 = \{\beta_{\ell r}\, e^{j\psi_{\ell r}}\}\, Y'_{0r}\, e^{j\varphi_{0r}} + \{\beta_{\ell r}\, e^{-j\psi_{\ell r}}\}\, Y'_{0r}\, e^{-j\varphi_{0r}} \qquad (12.123)$$

En introduisant ces conditions initiales dans la réponse du système (12.117) et en utilisant les relations d'orthogonalité (12.109) on obtient

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\, Y'_{0r}\, e^{j\varphi_{0r}}\, \{\beta_{\ell r}\, e^{j\psi_{\ell r}}\}\, e^{-(\lambda_r + j\omega_r)t} + $$

$$+ \frac{1}{2}\, Y'_{0r}\, e^{-j\varphi_{0r}}\, \{\beta_{\ell r}\, e^{-j\psi_{\ell r}}\}\, e^{-(\lambda_r - j\omega_r)t} \qquad (12.124)$$

Il vient finalement, en groupant les termes et en revenant aux fonctions harmoniques,

$$y = Y'_{0r} \{\beta_{\ell r}\, e^{-\lambda_r t} \cos(\omega_r t - \psi_{\ell r} - \varphi_{0r})\} \tag{12.125}$$

Comme précédemment, le vecteur $\boldsymbol{x}$ des déplacements suffit pour décrire le mouvement du système

$$\boldsymbol{x} = X'_{0r} \{\beta_{ir}\, e^{-\lambda_r t} \cos(\omega_r t - \psi_{ir} - \varphi_{0r})\} \tag{12.126}$$

Ce résultat montre que pour isoler un mode dans un système amorti, il ne suffit plus de choisir une configuration statique initiale. Il faut encore, en raison des déphasages ψ_{ir}, imposer une valeur déterminée à $(n-1)$ des vitesses $\dot{x}_i$, seule l'une d'entre elles – par exemple la première $\dot{x}_1$ – pouvant être nulle. Cette condition rend très problématique le fait de pouvoir isoler un mode dans un système réel.

Au chapitre 13, nous allons traiter un exemple simple (deux degrés de liberté), permettant d'illustrer le concept de modes complexes et de bien saisir la différence entre modes réels et modes complexes.

12.8 RECHERCHE DIRECTE DE SOLUTIONS PARTICULIÈRES

Lorsque le système (12.71) d'équations différentielles est établi, soit par dérivation des équations canoniques de Hamilton, soit par la transformation de Duncan, sa résolution peut aussi être abordée par la recherche de solutions particulières pour le vecteur $\boldsymbol{y}$. En effet, nous avions

$$[D]\,\dot{\boldsymbol{y}} + [G]\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

avec

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{Bmatrix} \tag{12.127}$$

Cherchons donc pour $\boldsymbol{y}$ des solutions de la forme

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}_p\, e^{-\delta_p t} \tag{12.128}$$

Par introduction de ces dernières dans l'équation du système, il vient

$$[-\delta_p\,[D] + [G]]\,\boldsymbol{B}_p\, e^{-\delta_p t} = \boldsymbol{0}$$

En simplifiant cette équation par la quantité non nulle $e^{-\delta_p t}$, en adoptant la convention d'écriture (12.80)

$$[F] = [D]^{-1}[G]$$

puis en recherchant la condition d'existence de solutions non toutes nulles, on retrouve l'équation caractéristique (12.83)

$$|\,[F] - \delta_p\,[I]\,| = 0$$

D'autre part, les vecteurs propres sont obtenus par la résolution des $2n$ systèmes homogènes (12.86)

$$[[F] - \delta_p \lceil I \rfloor] \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{0}$$

12.9 AUTRE FORME DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Si l'on dispose de la matrice $[a]$ des coefficients d'influence, inverse de la matrice de rigidité $[K]$, il est commode d'écrire l'équation différentielle matricielle (12.1) du système

$$[a]\,[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [a]\,[C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{12.129}$$

Afin d'obtenir un système différentiel d'ordre $2n$, il faut adjoindre à cette équation, conformément à la méthode de Duncan, l'équation triviale suivante

$$[a]\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}} - [a]\,[M]\,\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

Les deux équations précédentes peuvent être groupées comme suit

$$\begin{bmatrix} [0] & [a]\,[M] \\ [a]\,[M] & [a]\,[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[a]\,[M] & [0] \\ [0] & \lceil I \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{12.130}$$

Mis à part certaines circonstances exceptionnelles, que nous n'envisagerons pas ici, la matrice $[a]$ est définie positive, et donc inversible. On peut dès lors inverser la matrice diagonale ci-dessus

$$\begin{bmatrix} -[a]\,[M] & [0] \\ [0] & \lceil I \rfloor \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}\,[a]^{-1} & [0] \\ [0] & \lceil I \rfloor \end{bmatrix} \tag{12.131}$$

En prémultipliant le système (12.130) par la matrice inverse (12.131), puis en adoptant l'écriture

$$[U] = \begin{bmatrix} [0] & -\lceil I \rfloor \\ [a]\,[M] & [a]\,[C] \end{bmatrix} \tag{12.132}$$

on obtient, compte tenu de (12.127)

$$[U]\,\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \tag{12.133}$$

Comme précédemment, on cherche des solutions particulières

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}_p\, \mathrm{e}^{-\delta_p t}$$

Avec la notation

$$w_p = \frac{1}{\delta_p} \tag{12.134}$$

la démarche déjà décrite conduit à résoudre l'équation caractéristique

$$|[U] - w_p \lceil I \rfloor| = 0 \tag{12.135}$$

Les vecteurs propres sont donnés par les $2n$ relations homogènes

$$[[U] - w_p \lceil I \rfloor] \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{0} \tag{12.136}$$

CHAPITRE 13

EXEMPLE DE VISUALISATION DE MODES PROPRES COMPLEXES

13.1 DESCRIPTION DU SYSTÈME

Un mode propre reste une notion relativement abstraite en raison de la nature et de la dimension de l'espace considéré. En effet, les n coordonnées généralisées x_i de départ ayant en général des dimensions physiques différentes (longueurs, angles, etc.), il est illusoire d'espérer trouver une interprétation physique à l'espace dont elles constituent une base.

Cependant, lorsque toutes les coordonnées x_i sont des longueurs et que leur nombre est inférieur ou égal à trois, l'espace défini est facilement interprétable; il s'agit de la droite, du plan ou de l'espace euclidiens selon que n vaut respectivement un, deux ou trois.

Dans le but de simplifier le plus possible la formulation mathématique et la représentation des modes, nous avons choisi un système ne comportant qu'une masse ponctuelle se déplaçant dans un plan et maintenue dans sa position d'équilibre par r ressorts de rigidités k_i. D'autre part, t résistances visqueuses de constantes c_j agissent sur la masse. Un tel système possède deux degrés de liberté (fig. 13.1).

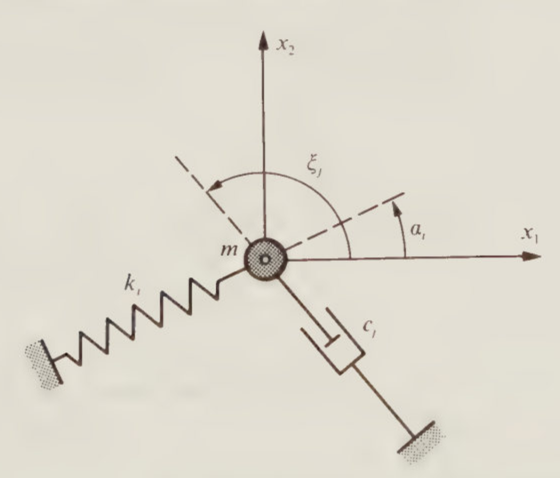


Fig. 13.1 Masse ponctuelle attachée à r ressorts et t résistances visqueuses.

Les lignes d'action des ressorts k_i sont repérées par les angles a_i, celles des résistances c_j par les angles ξ_j. Afin de conserver la linéarité du problème, nous

supposons les éléments élastiques et dissipatifs suffisamment longs pour que les angles a_i et ξ_j puissent être considérés comme constants lors des déplacements de la masse.

13.2 FORMES ÉNERGÉTIQUES · ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Il est ici commode d'utiliser les équations de Lagrange (10.11) pour établir l'équation différentielle matricielle du mouvement de la masse.

L'**énergie cinétique** a la forme élémentaire

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) \tag{13.1}$$

La matrice des masses qui en découle est alors simplement

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \, \lceil I \rfloor \tag{13.2}$$

Pour calculer l'**énergie potentielle,** considérons un déplacement quelconque ***00'*** de la masse m (fig. 13.2).

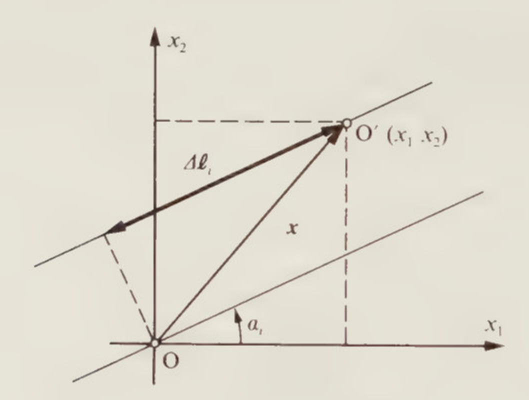


Fig. 13.2 Allongement du ressort k_i dans le déplacement ***00'*** de la masse.

Dans ce déplacement le ressort k_i, dont la ligne d'action est repérée par l'angle a_i supposé constant, s'allonge de la quantité $\Delta \ell_i$

$$\Delta \ell_i = x_1 \cos a_i + x_2 \sin a_i \tag{13.3}$$

L'énergie potentielle du système est donnée par la somme

$$V = \frac{1}{2} \sum_i^r k_i \, \Delta \ell_i^2 \tag{13.4}$$

Ses dérivées partielles ont pour expression

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} = \sum_i^r k_i \, \Delta\ell_i \, \frac{\partial \Delta\ell_i}{\partial x_s} \qquad s = 1, 2 \tag{13.5}$$

On en déduit dès lors facilement la matrice de rigidité

$$[K] = \sum_i^r k_i \begin{bmatrix} \cos^2 a_i & \sin a_i \cos a_i \\ \sin a_i \cos a_i & \sin^2 a_i \end{bmatrix} \tag{13.6}$$

Bien que chaque matrice d'indice i soit singulière, leur somme ne l'est pas et la matrice de rigidité est régulière, à l'exception de certaines configurations particulières qui ne présentent pas d'intérêt dans notre étude.

Par analogie avec le résultat établi pour l'élongation des ressorts, la vitesse dans la direction ξ_j d'une résistance visqueuse est simplement

$$\dot{\Delta\ell}_j = \dot{x}_1 \cos \xi_j + \dot{x}_2 \sin \xi_j \tag{13.7}$$

La *fonction de dissipation, c'est-à-dire* la demi-puissance totale dissipée, a pour valeur

$$W = \frac{1}{2} \sum_j^t c_j \, \dot{\Delta\ell}_j^2 \tag{13.8}$$

Les dérivées partielles ont la même forme que précédemment, soit

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_s} = \sum_j^t c_j \, \dot{\Delta\ell}_j \, \frac{\partial \dot{\Delta\ell}_j}{\partial \dot{x}_s} \qquad s = 1, 2 \tag{13.9}$$

La matrice d'amortissement a donc la même forme que celle de rigidité

$$[C] = \sum_j^t c_j \begin{bmatrix} \cos^2 \xi_j & \sin \xi_j \cos \xi_j \\ \sin \xi_j \cos \xi_j & \sin^2 \xi_j \end{bmatrix} \tag{13.10}$$

En désignant par $\boldsymbol{x}$ le vecteur des déplacements, l'*équation différentielle matricielle* du système est de la forme (12.1)

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Dans notre cas particulier, comme $[M] = m\,[I]$, la condition de Caughey exprimée par (12.11) se simplifie

$$[C]\,[K] = [K]\,[C] \tag{13.11}$$

Après avoir vérifié que cette condition n'est pas satisfaite, revenons à la solution de l'équation différentielle, donnée par (12.104), avec $n = 2$ et $\ell = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = &\{\beta_{\ell 1}\, Y_1\, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi_{\ell 1} - \varphi_1)\} + \\ &+ \{\beta_{\ell 2}\, Y_2\, \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \cos(\omega_2 t - \psi_{\ell 2} - \varphi_2)\} \end{aligned} \tag{13.12}$$

Rappelons que le vecteur $\boldsymbol{y}$ est défini par

$$\boldsymbol{y}^T = \{\dot{\boldsymbol{x}}^T \, \boldsymbol{x}^T\} = \{\dot{x}_1 \, \dot{x}_2 \, x_1 \, x_2\}$$

Enfin, le mouvement de la masse est décrit par l'équation (12.105)

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{11} \, X_1 \, e^{-\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi_{11} - \varphi_1) + \beta_{12} \, X_2 \, e^{-\lambda_2 t} \cos(\omega_2 t - \psi_{12} - \varphi_2) \\ x_2 = \beta_{21} \, X_1 \, e^{-\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi_{21} - \varphi_1) + \beta_{22} \, X_2 \, e^{-\lambda_2 t} \cos(\omega_2 t - \psi_{22} - \varphi_2) \end{cases} \tag{13.13}$$

13.3 ISOLATION D'UN MODE

13.3.1 Cas général

La condition analytique d'isolation d'un mode est évidente. Il suffit, dans les équations ci-dessus, d'annuler l'amplitude X_r relative au mode que l'on veut faire disparaître. Il ne reste alors qu'à fixer les deux conditions initiales du mode restant qui devient ainsi

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{1p} \, X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{1p} - \varphi_p) \\ x_2 = \beta_{2p} \, X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_{2p} - \varphi_p) \end{cases} \qquad p = 1, 2 \tag{13.14}$$

Par analogie au lâcher d'un oscillateur élémentaire avec élongation donnée et vitesse nulle, imposons les conditions initiales suivantes

$$x_1(0) = X_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \tag{13.15}$$

Afin de simplifier l'expression de x_p et φ_p, nous pouvons choisir comme suit la normalisation des vecteurs propres

$$\beta_{1p} = 1 \tag{13.16}$$

Les grandeurs β_{2p} et ψ_{2p} peuvent être remplacées par β_p et ψ_p, avec

$$\beta_p = \beta_{2p}/\beta_{1p} \qquad \text{et} \qquad \psi_p = \psi_{2p} - \psi_{1p} \tag{13.17}$$

Le mode restant est alors décrit par les nouvelles relations

$$\begin{cases} x_1 = X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ x_2 = \beta_p \, X_p \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p \, t - \psi_p - \varphi_p) \end{cases} \tag{13.18}$$

En introduisant les conditions initiales choisies dans ces équations on détermine

$$X_p = \frac{X_0}{\cos \varphi_p} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \varphi_p = \frac{\lambda_p}{\omega_p} \tag{13.19}$$

Les conditions initiales relatives au déplacement x_2 peuvent ensuite être calculées

$$\begin{cases} x_2(0) = \beta_p X_0 \left(\cos \psi_p - \dfrac{\lambda_p}{\omega_p} \sin \psi_p \right) \\ \dot{x}_2(0) = \beta_p X_0 \left(-\lambda_p \dfrac{\cos(\varphi_p + \psi_p)}{\cos \varphi_p} + \omega_p \dfrac{\sin(\varphi_p + \psi_p)}{\cos \varphi_p} \right) \end{cases}$$

En développant les expressions trigonométriques de la seconde relation ci-dessus, on obtient plus simplement

$$\begin{cases} x_2(0) = \beta_p X_0 \left(\cos \psi_p - \dfrac{\lambda_p}{\omega_p} \sin \psi_p \right) \\ \dot{x}_2(0) = \beta_p X_0 \dfrac{\lambda_p^2 + \omega_p^2}{\omega_p} \sin \psi_p \end{cases} \tag{13.20}$$

Les conditions initiales permettant l'isolation d'un mode sont donc fixées par les relations (13.15) et (13.20). On voit qu'il est nécessaire, non seulement d'amener la masse ponctuelle en un point donné du plan O x_1 x_2, mais encore de lui imposer une vitesse initiale $\dot{x}_2(0)$.

Pratiquement cela revient à fournir à la masse, au moyen d'un coup de marteau calibré, une impulsion dans la direction x_2, de valeur

$$\mathrm{I} = m \, \dot{x}_2 \, (0) = m \, \beta_p \, X_0 \frac{\lambda_p^2 + \omega_p^2}{\omega_p} \sin \psi_p \tag{13.21}$$

Le mode propre conservé est alors régi par les équations

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X_0}{\cos \varphi_p} \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ x_2 = \beta_p \dfrac{X_0}{\cos \varphi_p} \, e^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t - \psi_p - \varphi_p) \end{cases} \tag{13.22}$$

Ces équations, de type paramétrique, montrent que la trajectoire de la masse correspondant à un mode propre est une *spirale elliptique* décrite dans le plan O x_1 x_2 du système.

13.3.2 Axes principaux de la trajectoire

Par définition, les axes principaux coupent orthogonalement la spirale elliptique. Cela revient à dire que le vecteur des déplacements $\boldsymbol{x}$ et le vecteur des vitesses $\dot{\boldsymbol{x}}$ ont un produit scalaire nul aux points d'intersection entre ces axes et la trajectoire

$$\boldsymbol{x}^T \dot{\boldsymbol{x}} = 0$$

Pour la suite, il est commode d'écrire ce produit sous la forme

$$1 + \frac{x_2\, \dot{x}_2}{x_1\, \dot{x}_1} = 0 \tag{13.23}$$

La dérivation des équations (13.22) donne

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{X_0}{\cos\varphi_p}\, e^{-\lambda_p t} \left(\lambda_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) + \omega_p \sin(\omega_p t - \varphi_p)\right) \\[2ex] \dot{x}_2 = -\beta_p \dfrac{X_0}{\cos\varphi_p}\, e^{-\lambda_p t} \left(\lambda_p \cos(\omega_p t - \psi_p - \varphi_p) + \omega_p \sin(\omega_p t - \psi_p - \varphi_p)\right) \end{cases} \tag{13.24}$$

En adoptant l'écriture $u = \omega t - \varphi$, la condition (13.23) devient

$$1 + \beta_p^2 \frac{\lambda_p \cos^2(u_p - \psi_p) + \omega_p \sin(u_p - \psi_p)\cos(u_p - \psi_p)}{\lambda_p \cos^2 u_p + \omega_p \sin u_p \cos u_p} = 0$$

puis, après quelques transformations trigonométriques,

$$1 + \beta_p^2 \frac{\operatorname{tg}\varphi_p \left(1 - \cos 2(\omega_p t - \psi_p)\right) + \sin 2(\omega_p t - \psi_p)}{\operatorname{tg}\varphi_p \left(1 - \cos 2\omega_p t\right) + \sin 2\omega_p t} = 0 \tag{13.25}$$

Cette équation possède deux séries de solutions

$$\begin{cases} t'_p = t'_{p0} + \gamma' \dfrac{\pi}{\omega_p} & \gamma' = 1, 2, \ldots \\[2ex] t''_p = t''_{p0} + \gamma'' \dfrac{\pi}{\omega_p} & \gamma'' = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{13.26}$$

qui correspondent respectivement aux deux angles θ'_p et θ''_p définissant la direction des axes principaux de la trajectoire. Ces angles, que nous appellerons directions principales par la suite, sont déterminés par leur tangente

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta'_p = \left.\dfrac{x_2}{x_1}\right|_{t = t'_p} \\[2ex] \operatorname{tg}\theta''_p = \left.\dfrac{x_2}{x_1}\right|_{t = t''_p} \end{cases} \tag{13.27}$$

Les directions principales d'un même mode propre ne sont pas orthogonales entre elles, comme nous le verrons dans l'application numérique traitée par la suite; elles ne sont pas non plus orthogonales aux directions principales de l'autre mode propre.

13.3.3 Système conservatif

Afin de permettre la comparaison de certains résultats, revenons au système de la figure 13.1, mais en le supposant dépourvu de résistances visqueuses. Les matrices $[M]$ et $[K]$ restent inchangées alors que la matrice d'amortissement est identiquement nulle. Les valeurs propres sont imaginaires pures et les vecteurs propres sont réels; par conséquent $\lambda_p=0$ et $\psi_p=0$.

Pour isoler un mode, conservons les conditions initiales (13.15), c'est-à-dire

$$x_1(0) = X_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

Les conditions initiales (13.20) se simplifient à

$$x_2(0) = \beta_p X_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{13.28}$$

Les deux vitesses initiales étant nulles, il s'agit cette fois d'un lâcher simple de la masse, à partir d'un point déterminé du plan $x_1\ x_2$. Les équations (13.22) du mode propre conservé deviennent, pour le système conservatif

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X_0}{\cos \varphi_p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ x_2 = \beta_p \dfrac{X_0}{\cos \varphi_p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \end{cases} \tag{13.29}$$

Ce résultat montre que la trajectoire de la masse est un segment de la droite d'équation

$$x_2 = \beta_p\, x_1 \tag{13.30}$$

Dans le cas particulier, les vecteurs propres sont

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

Leur orthogonalité prend la forme du produit scalaire (11.60) puisque $[M]=m\,[I]$. Il vient donc

$$\boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{\beta}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \beta_1 \beta_2 = 0$$

soit encore

$$\beta_1 \beta_2 = -1 \tag{13.31}$$

Ainsi, les trajectoires correspondant aux deux modes propres sont deux segments de droite perpendiculaires.

13.4 APPLICATION NUMÉRIQUE

13.4.1 Equations du mouvement

Afin d'illustrer les notions développées dans ce chapitre, choisissons un exemple numérique comportant trois rigidités et trois résistances

$m = 3$ kg

$k_1 = 700$ N/m $\quad k_2 = 1100$ N/m $\quad k_3 = 1300$ N/m

$a_1 = 19°$ $\quad a_2 = 152°$ $\quad a_3 = 262°$

$c_1 = 15$ kg/s $\quad c_2 = 21$ kg/s $\quad c_3 = 13$ kg/s

$\xi_1 = 28°$ $\quad \xi_2 = 160°$ $\quad \xi_3 = 300°$

Avec ces valeurs, les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement deviennent respectivement

$$[M] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1509 & -61{,}32 \\ -61{,}32 & 1591 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 33{,}49 & -6{,}161 \\ -6{,}161 & 15{,}51 \end{bmatrix} \qquad (13.32)$$

Le noyau $[F]$, d'ordre $2n$, se calcule aisément (pour simplifier l'écriture, les quatre premiers chiffres significatifs seulement sont indiqués par la suite)

$$[F] = \begin{bmatrix} 11{,}16 & -2{,}054 & 502{,}8 & -20{,}44 \\ -2{,}054 & 5{,}171 & -20{,}44 & 530{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (13.33)$$

Les solutions de l'équation caractéristique (12.83) ont pour valeurs

$$\begin{cases} \delta_1 = 2{,}350 + \mathrm{j}\ 22{,}62 \\ \delta_2 = 5{,}817 + \mathrm{j}\ 21{,}93 \\ \delta_3 = 2{,}350 - \mathrm{j}\ 22{,}62 = \delta_1{}^* \\ \delta_4 = 5{,}817 - \mathrm{j}\ 21{,}93 = \delta_2{}^* \end{cases} \qquad (13.34)$$

et la matrice $[B]$ des vecteurs modaux devient

$$[B] = \begin{bmatrix} 22{,}74\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,1{,}674} & 22{,}69\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,1{,}830} & 22{,}74\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}674} & 22{,}69\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}830} \\ 69{,}22\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2{,}199} & 6{,}870\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}857} & 69{,}22\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}199} & 6{,}870\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,1{,}857} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3{,}044\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,0{,}5243} & 0{,}3028\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2{,}596} & 3{,}044\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}5243} & 0{,}3028\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}596} \end{bmatrix} \qquad (13.35)$$

Le mouvement général de la masse est donné par (13.13):

$$\begin{cases} x_1 = X_1\ \mathrm{e}^{-2{,}35\,t} \cos(22{,}62\ t - \varphi_1) + \\ \quad + X_2\ \mathrm{e}^{-5{,}817\,t} \cos(21{,}93\ t - \varphi_2) \\ x_2 = 3{,}044\ X_1\ \mathrm{e}^{-2{,}35\,t} \cos(22{,}62\ t + 0{,}5243 - \varphi_1) + \\ \quad + 0{,}3028\ X_2\ \mathrm{e}^{-5{,}817\,t} \cos(21{,}93\ t + 2{,}596 - \varphi_2) \end{cases} \qquad (13.36)$$

Les amortissements modaux sont respectivement d'après (12.106)

$\eta_1 = 0{,}1033 \qquad \eta_2 = 0{,}2563$

13.4.2 Isolation du premier mode

On choisit les conditions initiales (13.15), c'est-à-dire $x_1(0)=X_0$ et $\dot{x}_1(0)=0$ puis on calcule, d'après (13.19)

$$\varphi_1 = \text{arctg}\,\frac{\lambda_1}{\omega_1} = \frac{2{,}350}{22{,}62} = 0{,}1035 = \pi/2-1{,}467$$

$$\frac{1}{\cos\varphi_1} = 1{,}0054$$

Les relations (13.20) permettent ensuite de déterminer

$x_2(0) = 2{,}793 \qquad \dot{x}_2(0) = -34{,}84$

Les directions principales du mode, obtenues en résolvant l'équation (13.25), ont pour valeurs

$\theta_1' = \quad 74{,}66°$

$\theta_1'' = -17{,}19°$

Finalement, le premier mode isolé a pour équations

$$\begin{cases} x_1/X_0 = 1{,}005\ \text{e}^{-2{,}35\,t} \cos\,(22{,}62\,t-0{,}1035) \\ x_2/X_0 = 3{,}060\ \text{e}^{-2{,}35\,t} \cos\,(22{,}62\,t+0{,}4208) \end{cases} \qquad (13.37)$$

La trajectoire décrite par la masse est la spirale elliptique représentée sur la figure 13.3.

13.4.3 Isolation du second mode

En procédant de manière analogue, on obtient les résultats suivants pour le second mode

$$\varphi_2 = \text{arctg}\,\frac{\lambda_2}{\omega_2} = \frac{5{,}817}{21{,}93} = 0{,}2592 = \pi/2-1{,}3116$$

$$\frac{1}{\cos\varphi_2} = 1{,}0346$$

$x_1(0) = X_0 \qquad \dot{x}_1(0) = 0$

$x_2(0) = -0{,}2171\ X_0 \qquad \dot{x}_2(0) = -3{,}688\ X_0$

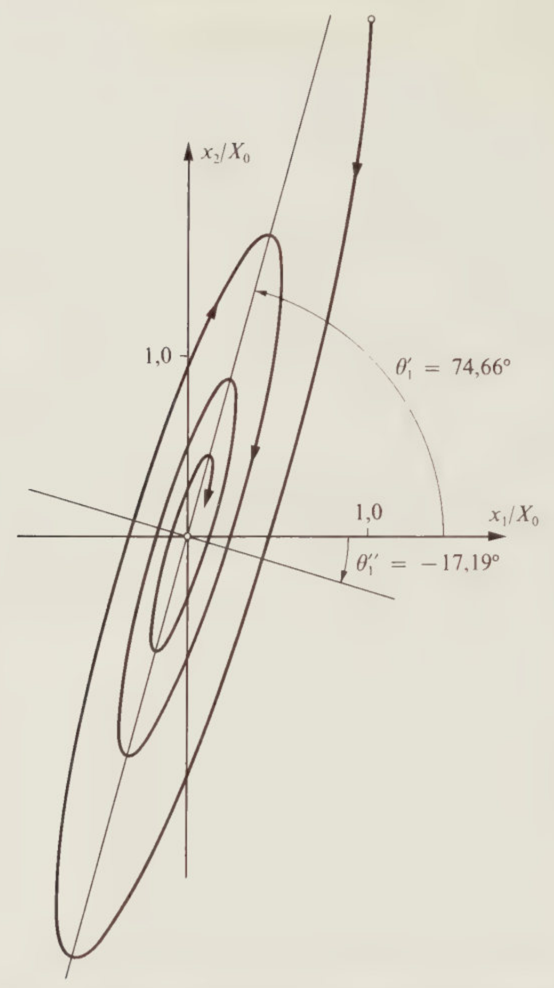


Fig. 13.3 Trajectoire de la masse correspondant au premier mode complexe du système de la figure 13.1.

Les directions modales valent

$$\theta_2' = -12{,}55°$$

$$\theta_2'' = \quad 72{,}88°$$

Les équations régissant le second mode isolé sont ainsi

$$\begin{cases} x_1/X_0 = 1{,}035\ \mathrm{e}^{-5{,}817\,t} \cos(21{,}93\ t - 0{,}2592) \\ x_2/X_0 = 0{,}3132\ \mathrm{e}^{-5{,}817\,t} \cos(21{,}93\ t + 2{,}337) \end{cases} \tag{13.38}$$

La figure 13.4 représente la spirale elliptique correspondant au second mode.

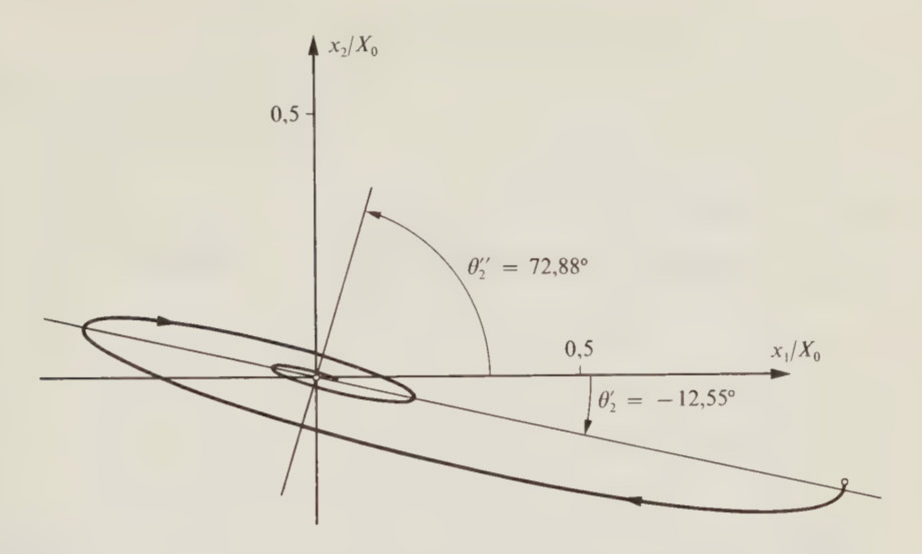


Fig. 13.4 Trajectoire de la masse correspondant au second mode complexe du système de la figure 13.1.

13.4.4 Système conservatif

Quand les résistances c_j sont nulles, le système se réduit à

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Les matrices des masses et des rigidités restent définies par les relations (13.2) et (13.6) respectivement. Avec les valeurs numériques choisies, on obtient les valeurs propres suivantes

$$\begin{cases} \delta_1 = \mathrm{j}\,\omega_1 = \mathrm{j}\;22{,}18 \\ \delta_2 = \mathrm{j}\,\omega_2 = \mathrm{j}\;23{,}27 \\ \delta_3 = -\mathrm{j}\,\omega_1 = -\mathrm{j}\;22{,}18 \\ \delta_4 = -\mathrm{j}\,\omega_2 = -\mathrm{j}\;23{,}27 \end{cases} \tag{13.39}$$

Comme les modes sont réels, la matrice $[B]$ de changement de base, d'ordre $2n$, s'écrit

$$[B] = \begin{bmatrix} 22{,}18\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} & 23{,}27\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} & 22{,}18\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} & 23{,}27\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} \\ 11{,}78\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} & 43{,}82\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} & 11{,}78\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} & 43{,}82\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}5310 & -1{,}883 & 0{,}5310 & -1{,}833 \end{bmatrix} \tag{13.40}$$

Le mouvement est alors décrit par les équations générales

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(22{,}18\ t-\varphi_1) + X_2 \cos(23{,}27\ t-\varphi_2) \\ x_2 = 0{,}5310\ X_1 \cos(22{,}18\ t-\varphi_1) - 1{,}883\ X_2 \cos(23{,}27\ t-\varphi_2) \end{cases} \quad (13.41)$$

Isolation du 1er mode

Dans le cas particulier, les conditions initiales (13.15) entraînent $\varphi_1=0$ et par conséquent

$$x_1(0) = X_0 \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0{,}5310\ X_0 \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

Le premier mode est régi par les équations

$$\begin{cases} x_1/X_0 = \cos(22{,}18\ t) \\ x_2/X_0 = 0{,}5310 \cos(22{,}18\ t) \end{cases} \quad (13.42)$$

La trajectoire correspondante est un segment de la droite

$$x_2 = 0{,}5310\ x_1$$

qui fait avec l'axe x_1 un angle ayant pour valeur

$$\theta_1 = \text{arctg}\ (0{,}5310) = 27{,}97°$$

Isolation du second mode

Comme pour le premier mode, il vient $\varphi_2=0$ et les conditions initiales s'écrivent

$$x_1(0) = X_0 \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = -1{,}883\ X_0 \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{cases} x_1/X_0 = \cos(23{,}27\ t) \\ x_2/X_0 = -1{,}883 \cos(23{,}27\ t) \end{cases} \quad (13.43)$$

La trajectoire est un segment de la droite

$$x_2 = -1{,}883\ x_1$$

faisant un angle θ_2 avec l'axe x_1

$$\theta_2 = \text{arctg}\ (-1{,}883) = -62{,}03°$$

Les considérations théoriques du paragraphe 13.3 avaient montré que l'orthogonalité des modes implique, dans le cas particulier, la perpendicularité des droites modales. Ceci est confirmé par les résultats numériques ci-dessus, représentés sur la figure 13.5.

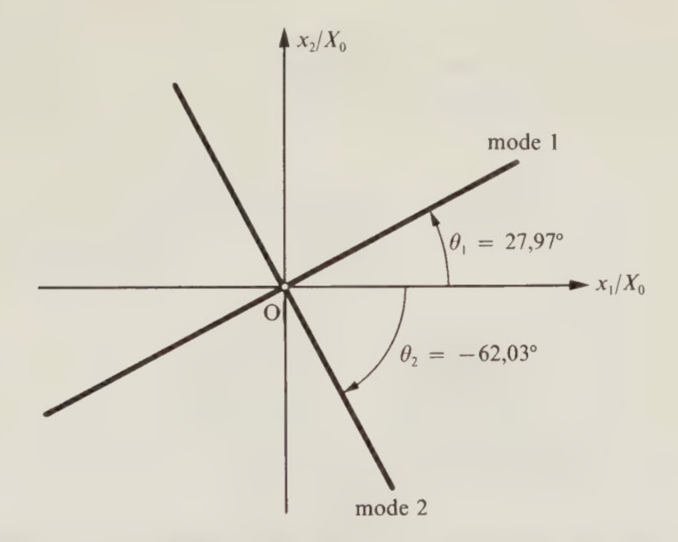


Fig. 13.5 Trajectoires de la masse correspondant aux deux modes propres réels du système de la figure 13.1 sans amortissement.

13.5 RÉSUMÉ ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement d'un système coplanaire constitué d'une masse ponctuelle attachée à un nombre quelconque de ressorts et de résistances visqueuses (éléments discrets linéaires). Un tel système comporte deux degrés de liberté, désignés x_1 et x_2. Les résultats de l'étude entreprise peuvent être résumés et commentés comme suit.

- Quand le système est dissipatif, les deux modes propres, dits complexes, correspondent à des trajectoires de la masse qui sont deux spirales elliptiques. Les axes d'une même spirale ne sont pas orthogonaux, ni entre eux, ni avec ceux de l'autre spirale. Pour isoler un mode vibratoire, il faut lâcher la masse à partir d'un point déterminé du plan x_1 x_2, en imposant de plus une certaine vitesse initiale (par exemple selon x_2, comme nous l'avons fait dans ce chapitre).
- Quand le système est conservatif (toutes les résistances sont nulles) les deux trajectoires modales sont deux segments de droite orthogonaux. L'isolation d'un mode peut être obtenue par un lâcher de la masse, sans vitesse initiale, à partir d'un point déterminé du plan x_1 x_2.
- Les directions des trajectoires de la masse du système conservatif sont en fait les directions principales du produit $[M]^{-1}[K]$. Quant aux directions principales du produit $[M]^{-1}[C]$ elles ont pour valeurs, dans l'application numérique choisie $\theta_1 = 72{,}79°$, $\theta_2 = -17{,}21°$.
- L'existence d'un amortissement ne respectant pas la condition de Caughey entraîne une double conséquence; d'une part les trajectoires rectilignes se transforment en spirales elliptiques, d'autre part les directions principales des modes complexes sont situées entre les directions principales de $[M]^{-1}[K]$ et

celles de $[M]^{-1}$ $[C]$. Elles sont d'autant plus proches de ces dernières que l'amortissement est important (fig. 13.6).

- Il apparaît ainsi clairement que la condition de Caughey exprime la coïncidence des directions principales de $[M]^{-1}[K]$ avec celles de $[M]^{-1}[C]$.

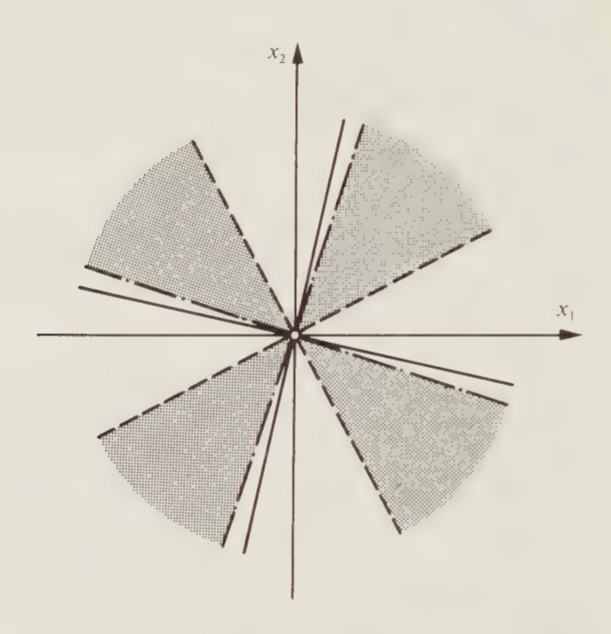


Fig. 13.6 Directions principales pour le système de la figure 13.1.
—— modes complexes
– – – $[M]^{-1}$ $[K]$
— · — $[M]^{-1}$ $[C]$

CHAPITRE 14

RÉGIME FORCÉ DE L'OSCILLATEUR GÉNÉRALISÉ

14.1 INTRODUCTION

Pour les systèmes mécaniques possédant de nombreux degrés de liberté, il est illusoire, en raison de la très grande diversité des circonstances envisageables, de vouloir entreprendre une étude analytique systématique de la réponse aux différents types d'excitations – les régimes forcés – ainsi que nous l'avions fait pour l'oscillateur élémentaire. Nous avions vu qu'avec deux degrés de liberté déjà, l'étude un peu approfondie d'un cas particulier pourtant simple (l'oscillateur de Frahm) représentait un travail d'une certaine importance.

Dans ce chapitre, nous nous bornerons à établir la forme générale de la réponse due à des forces extérieures quelconques avec des conditions initiales quelconques. En raison de la linéarité du système, cette réponse est la superposition du régime libre provoqué par les conditions initiales, qui nous est déjà connu (sections 12.2 et 12.7), et du régime forcé provoqué par les forces extérieures. Ce dernier sera calculé au moyen de la transformation de Laplace et de l'intégrale de convolution.

Pour simplifier l'exposé, nous prendrons en considération directement les systèmes dissipatifs, en supposant que tous les modes sont oscillatoires et distincts. Comme au chapitre 12, il est favorable de traiter séparément

- les systèmes avec modes réels, qui satisfont la condition de Caughey et dont les systèmes conservatifs sont un cas particulier;
- les systèmes avec modes complexes (cas général).

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous donnerons une introduction à l'analyse modale expérimentale des systèmes réels.

14.2 SYSTÈMES DISSIPATIFS AVEC MODES RÉELS

Revenons à la relation (10.1) qui représente, sous forme matricielle, les équations différentielles du système en régime forcé

$$[M]\,\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\,\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$$

Le membre de droite est un vecteur à n composantes constitué des forces extérieures, quelconques, agissant sur le système.

La condition de Caughey étant supposée satisfaite, le changement de base

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q}$$

permet, comme nous l'avons vu à la section 12.2, de découpler le système d'équations ci-dessus. On obtient ainsi

$$[M^o]\,\ddot{\boldsymbol{q}} + [C^o]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [K^o]\,\boldsymbol{q} = [B]^T \boldsymbol{f}(t) \tag{14.1}$$

En adoptant le changement d'écriture

$$\boldsymbol{f}^o(t) = [B]^T \boldsymbol{f}(t) \tag{14.2}$$

on définit le vecteur $\boldsymbol{f}^o(t)$ des forces modales appliquées au système.

Divisons l'équation (14.1) par la matrice des masses modales

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + [M^o]^{-1}[C^o]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [M^o]^{-1}[K^o]\,\boldsymbol{q} = [M^o]^{-1}\,\boldsymbol{f}^o(t)$$

Utilisons ensuite les définitions (12.18)

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + [2\,\Lambda]\,\dot{\boldsymbol{q}} + [\Omega_0^2]\,\boldsymbol{q} = [M^o]^{-1}\,\boldsymbol{f}^o(t) \tag{14.3}$$

On obtient ainsi un système comportant n équations indépendantes, soit avec $p = 1, 2, ..., n$

$$\ddot{q}_p + 2\,\lambda_p\,\dot{q}_p + \omega_{0p}^2\,q_p = \frac{1}{m_p^o}\,f_p^o(t) \tag{14.4}$$

Ces équations sont analogues à celle d'un oscillateur élémentaire en régime forcé dont nous avons établi la solution au chapitre 6. L'utilisation de la transformation de Laplace et de l'intégrale de convolution (6.7) permet d'écrire la solution de (14.4) directement à partir de (6.13). Les conditions initiales étant supposées toutes nulles, on obtient

$$q_p = \frac{1}{m_p^o\,\omega_p}\int_0^t f_p^o(t-u)\,\mathrm{e}^{-\lambda_p u}\sin\omega_p u\,\mathrm{d}u \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{14.5}$$

On peut alors revenir aux coordonnées de départ par la matrice modale

$$\boldsymbol{x} = [B]\,\boldsymbol{q} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p\,q_p$$

La solution du régime forcé avec conditions initiales nulles est ainsi

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \boldsymbol{B}_p\,\frac{1}{m_p^o\,\omega_p}\int_0^t f_p^o(t-u)\,\mathrm{e}^{-\lambda_p u}\sin\omega_p u\,\mathrm{d}u \tag{14.6}$$

Avec des conditions initiales quelconques, il suffit d'ajouter à la solution ci-dessus le régime libre (12.31). En adoptant la notation de la section 12.3, les vecteurs modaux $\boldsymbol{B}_p$ deviennent $\boldsymbol{\beta}_p$. D'autre part la force modale de rang p est égale au produit scalaire

$$f_p^o(t) = \boldsymbol{B}_p^T\,\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{\beta}_p^T\,\boldsymbol{f}(t) \tag{14.7}$$

La solution générale du régime forcé s'écrit alors

$$x = \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \Big(\frac{1}{\omega_p} \int_0^t f_p^o(t-u)\, e^{-\lambda_p u} \sin \omega_p u \, du + \\ + e^{-\lambda_p t} \big(\boldsymbol{\beta}_p^T [M]\, \boldsymbol{X}_0 \cos \omega_p t + \frac{1}{\omega_p} \boldsymbol{\beta}_p^T [M] \{\boldsymbol{V}_0 + \lambda_p \boldsymbol{X}_0\} \sin \omega_p t\big)\Big) \tag{14.8}$$

La solution générale du régime forcé d'un système conservatif se déduit facilement de (14.8). Dans ce cas, les cœfficients λ_p sont tous nuls et les pulsations propres ω_p deviennent ω_{0p}

$$\begin{cases} \lambda_p = 0 \\ \omega_p^2 = \omega_{0p}^2 = \dfrac{k_p^o}{m_p^o} \end{cases} \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{14.9}$$

La solution (14.8) devient

$$x = \sum_p^n \frac{1}{m_p^o} \boldsymbol{\beta}_p \Big(\frac{1}{\omega_{0p}} \int_0^t f_p^o(t-u) \sin \omega_{0p} u \, du + \\ + \boldsymbol{\beta}_p^T [M]\, \boldsymbol{X}_0 \cos \omega_{0p} t + \frac{1}{\omega_{0p}} \boldsymbol{\beta}_p^T [M]\, \boldsymbol{V}_0 \sin \omega_{0p} t\Big) \tag{14.10}$$

Ce résultat montre que les deux derniers termes, dus aux conditions initiales $\boldsymbol{X}_0$ et $\boldsymbol{V}_0$, se maintiennent indéfiniment dans un système conservatif. Pour un tel système, comme nous l'avions déjà vu dans le cas d'un oscillateur élémentaire, il n'existe pas de régime permanent à proprement parler.

14.3 SYSTÈMES DISSIPATIFS DANS LE CAS GÉNÉRAL

La formulation hamiltonienne des équations différentielles a montré, quand la condition de Caughey n'est pas satisfaite, que le vecteur des forces extérieures $\boldsymbol{p}(t)$, d'ordre $2n$, doit être écrit sous la forme (12.66)

$$\boldsymbol{p}^T = \{\boldsymbol{0}^T \boldsymbol{f}^T(t)\}$$

Le système différentiel à résoudre est ainsi

$$[D]\, \dot{\boldsymbol{y}} + [G]\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}(t) \tag{14.11}$$

Le changement de base (12.74) et (12.75) permet de découpler le système ci-dessus qui devient

$$\lceil D^o \rfloor\, \dot{\boldsymbol{q}} + \lceil G^o \rfloor\, \boldsymbol{q} = [B]^T \boldsymbol{p}(t) \tag{14.12}$$

La matrice $[B]$ étant complexe, les forces modales le sont également. Appelons $\boldsymbol{p}^o(t)$ le vecteur des forces modales

$$\boldsymbol{p}^o(t) = [B]^T \boldsymbol{p}(t) \tag{14.13}$$

En divisant le système (14.12) par la matrice diagonale $\lceil D^o \rfloor$ et en utilisant la définition (12.79), on peut écrire

$$\dot{\boldsymbol{q}} + \lceil \Delta \rfloor \boldsymbol{q} = \lceil D^o \rfloor^{-1} \boldsymbol{p}^o(t) \tag{14.14}$$

Ce système est constitué de $2n$ équations différentielles indépendantes

$$\dot{q}_p + \delta_p \, q_p = \frac{1}{d_p^o} \, p_p^o(t) \qquad p = 1, 2, ..., 2n \tag{14.15}$$

Avec des conditions initiales toutes nulles, l'intégration de ces équations donne

$$q_p = \frac{1}{d_p^o} \int_0^t p_p^o(t-u) \, \mathrm{e}^{-\delta_p u} \, \mathrm{d}u \tag{14.16}$$

Reprenons les conventions d'écriture de la section (12.6), c'est-à-dire

$$\delta_p = \lambda_p + \mathrm{j}\omega_p$$

$$\delta_{p+n} = \lambda_p - \mathrm{j}\omega_p = \delta_p^*$$

La solution ci-dessus prend la forme

$$q_p = \frac{1}{d_p^o} \int_0^t p_p^o(t-u) \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p + \mathrm{j}\omega_p)u} \, \mathrm{d}u \tag{14.17}$$

et par conséquent

$$q_{p+n} = q_p^* = \frac{1}{d_p^{o*}} \int_0^t p_p^{o*}(t-u) \, \mathrm{e}^{-(\lambda_p - \mathrm{j}\omega_p)u} \, \mathrm{d}u \tag{14.18}$$

Revenons aux coordonnées de départ au moyen de la matrice modale $[B]$

$$\boldsymbol{y} = [B] \, \boldsymbol{q} = \sum_p^{2n} \boldsymbol{B}_p \, q_p$$

Les vecteurs modaux $\boldsymbol{B}_p$ sont également complexes et conjugués deux à deux, il vient donc

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^{n} (\boldsymbol{B}_p \, q_p + \boldsymbol{B}_p^* \, q_p^*) \tag{14.19}$$

Avant de poursuivre, il est commode d'adopter les conventions

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_p = \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} \\ d_p^o = D_p^o \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_p} \\ p_p^o(t) = |p_p^o(t)| \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_p(t)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{B}_p^* = \{\beta_{\ell p} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{\ell p}}\} \\ d_p^{o*} = D_p^o \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha_p} \\ p_p^{o*}(t) = |p_p^o(t)| \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_p(t)} \end{cases} \tag{14.20}$$

On peut maintenant introduire (14.17) et (14.18) dans (14.19), compte tenu de (14.20). En écrivant pour simplifier $z=t-u$, la composante d'ordre ℓ de la solution $\boldsymbol{y}$ a pour expression, avec $\ell=1, 2, ..., 2n$,

$$y_\ell = \sum_p^n (\beta_{\ell p}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\ell p}} \frac{1}{D_p^o}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}a_p} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_p(z)}\, \mathrm{e}^{-(\lambda_p+\mathrm{j}\omega_p)u}\, \mathrm{d}u +$$

$$+ \beta_{\ell p}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{\ell p}} \frac{1}{D_p^o}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}a_p} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_p(z)}\, \mathrm{e}^{-(\lambda_p-\mathrm{j}\omega_p)u}\, \mathrm{d}u)$$

En groupant les termes, il vient

$$y_\ell = \sum_p^n \beta_{\ell p} \frac{1}{D_p^o} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_p u} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_p u-\psi_{\ell p}-\theta_p(z)+a_p)} + \right.$$
$$\left. + \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_p u-\psi_{\ell p}-\theta_p(z)+a_p)}\right) \mathrm{d}u$$

puis, en faisant apparaître la fonction harmonique à la place des exponentielles,

$$y_\ell = \sum_p^n \beta_{\ell p} \frac{2}{D_p^o} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_p u} \cos\left(\omega_p u-\psi_{\ell p}-\theta_p(z)+a_p\right) \mathrm{d}u \qquad (14.21)$$

Vectoriellement, la solution peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{y} = \sum_p^n \{\beta_{\ell p} \frac{2}{D_p^o} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_p u} \cos\left(\omega_p u-\psi_{\ell p}-\theta_p(z)+a_p\right) \mathrm{d}u\} \qquad (14.22)$$

En adoptant le même changement d'indice qu'au paragraphe 12.7, le vecteur-déplacement $\boldsymbol{x}$ du système, formé des n dernières composantes de $\boldsymbol{y}$, a pour expression

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \{\beta_{ip} \frac{2}{D_p^o} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_p u} \cos\left(\omega_p u-\psi_{ip}-\theta_p(z)+a_p\right) \mathrm{d}u\} \qquad (14.23)$$

Le régime transitoire provoqué par les conditions initiales est donné par la relation (12.120), établie à la section 12.8. Il suffit de le superposer au résultat ci-dessus pour obtenir la forme la plus générale du régime forcé

$$\boldsymbol{x} = \sum_p^n \{\beta_{ip} (\frac{2}{D_p^o} \int_0^t |p_p^o(z)|\, \mathrm{e}^{-\lambda_p u} \cos\left(\omega_p u-\psi_{ip}-\theta_p(z)+a_p\right) \mathrm{d}u$$
$$+ X'_{0_p}\, \mathrm{e}^{-\lambda_p t} \cos(\omega_p t-\psi_{ip}-\varphi_0))\} \qquad (14.24)$$

Il est utile de rappeler que cette relation concerne un oscillateur discret généralisé dissipatif, compte tenu cependant des hypothèses restrictives suivantes

- tous les modes sont de nature oscillatoire,
- toutes les valeurs propres sont distinctes.

Si, en plus des modes oscillatoires, existent simultanément des modes critiques ou surcritiques, l'étude du régime forcé se complique sérieusement, sans présenter toutefois un grand intérêt dans le cas général. Il serait plus utile, mais cela sort du cadre fixé pour ce chapitre, d'examiner le risque d'instabilité qui peut apparaître dans le comportement du système quand deux valeurs propres sont très voisines l'une de l'autre. Ce phénomène est appelé *instabilité par confusion de valeurs propres.*

14.4 INTRODUCTION À L'ANALYSE MODALE EXPÉRIMENTALE

L'analyse modale expérimentale a pour objectif essentiel la détermination des caractéristiques dynamiques d'une structure réelle, c'est-à-dire les fréquences, modes et formes propres ainsi que les amortissements modaux. Cette discipline a connu un essor important ces dernières années en raison de la miniaturisation et de l'augmentation des performances des systèmes informatisés d'acquisition et de traitement numériques des signaux. Elle est basée sur la mesure du rapport entre une excitation donnée de la structure et la réponse (déplacements, vitesses, accélérations, ...) que cette excitation provoque.

La structure étudiée (caisse d'automobile, bâti de machine, pont métallique, etc.) est par nature continue alors que les mesures sont faites ponctuellement. Il est donc indispensable de procéder à une discrétisation de la structure, discrétisation déterminée par le choix des points d'application des forces excitatrices et celui des points de mesure.

Supposons, ce qui est conforme à la pratique habituelle, que les forces soient appliquées aux points où les mesures sont effectuées. Le nombre n de degrés de liberté du système discrétisé est alors égal au produit du nombre m de points de mesure par le nombre r de coordonnées généralisées choisies en chacun de ces points

$$n = m \cdot r \qquad (14.25)$$

Avec une telle démarche, il est clair que les matrices des masses, d'amortissement et de rigidité ne sont pas connues a priori. Il est donc nécessaire, pour déterminer les paramètres modaux, de procéder de manière différente que dans les chapitres précédents, tout en utilisant les résultats déjà établis.

Revenons à la relation (14.11) qui donne, sous forme matricielle, les équations différentielles du régime forcé dans le cas général, c'est-à-dire quand la relation de Caughey n'est pas satisfaite.

$$[D]\,\dot{\boldsymbol{y}} + [G]\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}(t)$$

Prenons la transformée de Laplace des deux membres en supposant les conditions initiales toutes nulles

$$\big[s[D] + [G]\big]\ \boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{P}(s) \qquad (14.26)$$

La matrice carrée d'ordre $2n$ du premier membre est appelée *impédance matricielle opérationnelle*

$$[Z(s)] = \big[[G]+s[D]\big] \qquad (14.27)$$

Son inverse, *l'admittance matricielle opérationnelle*, est désignée également sous le nom de *matrice des fonctions de transfert*

$$[H'(s)] = [Z(s)]^{-1} \tag{14.28}$$

Nous allons montrer que la connaissance de la matrice $[H'(s)]$ suffit pour déterminer tous les vecteurs propres du système.

Récrivons le système différentiel (14.26) sous la forme

$$[Z(s)]\ \boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{P}(s) \tag{14.29}$$

En se référant au chapitre 12, on voit que l'équation caractéristique du système homogène est

$$|Z(s)| = 0 \tag{14.30}$$

Elle possède $2n$ solutions complexes, conjuguées deux à deux, désignées δ_1 , δ_2 , ..., δ_{2n}. On peut donc l'écrire sous la forme

$$(s-\delta_1)\ (s-\delta_2)\ \ldots\ (s-\delta_{2n}) = 0$$

ou, en utilisant le symbole produit $\prod$,

$$\prod_{\ell}^{2n} (s-\delta_\ell) = 0 \tag{14.31}$$

Comme précédemment, les vecteurs propres sont obtenus en résolvant les systèmes homogènes

$$[Z(s=\delta_p)]\ \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{0} \tag{14.32}$$

La grandeur δ_p définie ci-dessus correspond, au signe près, à celle du chapitre 12. D'après (12.89), elle a pour valeur

$$\delta_p = -\frac{g_p^o}{d_p^o} \tag{14.33}$$

Si l'on désigne par $[Z(s)]^a$ la matrice adjointe de $[Z(s)]$, le calcul de $[H'(s)]$ donne par ailleurs

$$[H'(s)] = [Z(s)]^{-1} = \frac{[Z(s)]^a}{|Z(s)|} \tag{14.34}$$

En utilisant la forme (14.31) de l'équation caractéristique pour exprimer le dénominateur il vient, A étant une constante réelle,

$$[H'(s)] = \frac{[Z(s)]^a}{A \prod_{\ell}^{2n} (s-\delta_\ell)} \tag{14.35}$$

Comme les valeurs de δ_ℓ sont conjuguées deux à deux, on peut décomposer $[H'(s)]$ en une somme d'éléments simples de la forme

$$[H'(s)] = \sum_{p}^{2n} \frac{[R'^p]}{s-\delta_p} = \sum_{p}^{n} \left(\frac{[R'^p]}{s-\delta_p} + \frac{[R'^{p*}]}{s-\delta_p^*} \right) \tag{14.36}$$

dans laquelle $[R'^p]$ est appelée *matrice des résidus au pôle* δ_p. Cette matrice a pour expression

$$[R'^p] = \frac{[Z(s=\delta_p)]^a}{A \prod_{\ell \neq p}^{2n} (\delta_p - \delta_\ell)} \tag{14.37}$$

Mettons la relation (14.34) sous la forme équivalente

$$[Z(s)]\,[Z(s)]^a = |Z(s)|\,[I] \tag{14.38}$$

Le déterminant $|Z(s)|$ s'annule pour chaque valeur propre $s=\delta_p$. On peut ainsi écrire

$$[Z(s=\delta_p)]\,[Z(s=\delta_p)]^a = [0] \tag{14.39}$$

Cette relation implique, pour les $2n$ vecteurs colonnes de la matrice $[Z(s=\delta_p)]^a$,

$$[Z(s=\delta_p)]\,\boldsymbol{Z}_k^a\,(s=\delta_p) = \boldsymbol{0} \tag{14.40}$$

Les équations (14.32) et (14.40) sont identiques. Par conséquent, à la valeur propre δ_p, tous les vecteurs $\boldsymbol{Z}_k^a(s=\delta_p)$ sont égaux, à un facteur près, au vecteur propre $\boldsymbol{B}_p$. D'autre part, la relation (14.37) montre que la matrice des résidus au pôle $[R'^p]$ est proportionnelle à la matrice $[Z(s=\delta_p)]^a$. Les vecteurs colonnes de $[R'^p]$ sont donc, eux aussi, proportionnels au vecteur propre $\boldsymbol{B}_p$ pour la valeur propre $s=\delta_p$. Ce résultat démontre que la connaissance de la matrice $[H'(s)]$ suffit à déterminer les vecteurs propres du système.

Enfin, signalons encore que les matrices $[Z(s)]$ et $[H'(s)]$ sont symétriques puisque les matrices $[D]$ et $[G]$ le sont.

Nous allons maintenant exprimer la matrice des fonctions de transfert $[H'(s)]$ indépendamment des matrices $[D]$ et $[G]$ qui ne sont pas connues dans le cas présent. Pour cela, décomposons le vecteur $\boldsymbol{y}(t)$ dans la base modale formée des vecteurs $\boldsymbol{B}_p$. La relation (12.74) permet d'écrire

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{p}^{2n} q_p(t)\,\boldsymbol{B}_p \tag{14.41}$$

En prenant la transformée de Laplace des deux membres, il vient

$$\boldsymbol{Y}(s) = \sum_{p}^{2n} Q_p(s)\,\boldsymbol{B}_p \tag{14.42}$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (14.26) après avoir décomposé le produit

$$s \sum_{p}^{2n} Q_p(s)\,[D]\,\boldsymbol{B}_p + \sum_{p}^{2n} Q_p(s)\,[G]\,\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{P}(s)$$

Prémultipliée par le transposé d'un vecteur propre quelconque $\boldsymbol{B}_r$, l'équation précédente devient

$$s \sum_{p}^{2n} Q_p(s)\, \boldsymbol{B}_r^T\, [D]\, \boldsymbol{B}_p + \sum_{p}^{2n} Q_p(s)\, \boldsymbol{B}_r^T\, [G]\, \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{B}_r^T\, \boldsymbol{P}(s)$$

Les relations d'orthogonalité des vecteurs modaux (12.109) et (12.110) font disparaître tous les termes pour lesquels $r \neq p$. Il reste donc

$$s\, Q_r(s)\, d_r^o + Q_r(s)\, g_r^o = \boldsymbol{B}_r^T\, \boldsymbol{P}(s) \tag{14.43}$$

On obtient ainsi la valeur de $Q_r(s)$

$$Q_r(s) = \frac{\boldsymbol{B}_r^T\, \boldsymbol{P}(s)}{s\, d_r^o + g_r^o} \tag{14.44}$$

qui devient, en utilisant la relation (14.33),

$$Q_r(s) = \frac{\boldsymbol{B}_r^T\, \boldsymbol{P}(s)}{d_r^o\, (s - \delta_r)} \tag{14.45}$$

Compte tenu du dernier résultat, la relation (14.42) prend la forme

$$\boldsymbol{Y}(s) = \sum_{p}^{2n} \frac{\boldsymbol{B}_p^T\, \boldsymbol{P}(s)\, \boldsymbol{B}_p}{d_p^o\, (\mathrm{s} - \delta_p)} \tag{14.46}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres étant complexes et conjugués deux à deux, les termes de la somme ci-dessus peuvent être regroupés comme suit

$$\boldsymbol{Y}(s) = \sum_{p}^{n} \left(\frac{\boldsymbol{B}_p^T\, \boldsymbol{P}(s)\, \boldsymbol{B}_p}{d_p^o\, (s - \delta_p)} + \frac{\boldsymbol{B}_p^{*T}\, \boldsymbol{P}(s)\, \boldsymbol{B}_p^*}{d_p^{o*}\, (s - \delta_p^*)} \right) \tag{14.47}$$

Par définition, le vecteur $\boldsymbol{P}(s)$ a pour expression

$$\boldsymbol{P}(s) = \{\boldsymbol{0}^T\ \boldsymbol{F}(s)^T\}$$

Il est possible d'exprimer les n dernières composantes de $\boldsymbol{Y}(s)$, soit le vecteur $\boldsymbol{X}(s)$, sous une forme analogue à (14.47). Désignons par $\boldsymbol{b}_p$ le vecteur formé des n dernières composantes de $\boldsymbol{B}_p$. Il vient

$$\boldsymbol{X}(s) = \sum_{p}^{n} \left(\frac{\boldsymbol{b}_p^T\, \boldsymbol{F}(s)\, \boldsymbol{b}_p}{d_p^o\, (s - \delta_p)} + \frac{\boldsymbol{b}_p^{*T}\, \boldsymbol{F}(s)\, \boldsymbol{b}_p^*}{d_p^{o*}\, (s - \delta_p^*)} \right) \tag{14.48}$$

Cette relation donne, dans le domaine de Laplace, la réponse du système à une excitation $\boldsymbol{f}(t)$ quelconque.

Supposons que le vecteur $\boldsymbol{f}(t)$ ne comporte qu'une seule composante non nulle, la k-ième par exemple, et que de plus cette composante consiste en une impulsion de Dirac unité. La transformée de Laplace $\boldsymbol{F}(s)$ de $\boldsymbol{f}(t)$ ne comportera alors que des composantes nulles, sauf la k-ième égale à un. En pratique, une telle circonstance revient à fournir une impulsion selon le déplacement x_k, au moyen d'un coup de marteau calibré.

En désignant par $X_k(s)$ la réponse du système à cette impulsion et par b_{pk} la k-ième composante du vecteur propre $\boldsymbol{b}_p$, on obtient

$$X_k(s) = \sum_p^n \left(\frac{b_{pk}\,\boldsymbol{b}_p}{d_p^o\,(s-\delta_p)} + \frac{b_{pk}^*\,\boldsymbol{b}_p^*}{d_p^{o*}\,(s-\delta_p^*)} \right) \tag{14.49}$$

Comme nous l'avions vu pour l'oscillateur élémentaire, la réponse du système à une impulsion de Dirac est égale à la fonction de transfert exprimée au moyen de la transformée de Laplace.

Le vecteur $X_k(s)$ défini par (14.49) est ainsi le k-ième vecteur colonne de la matrice des fonctions de transfert $[H(s)]$, matrice de dimension $n \times n$ et constituant la sous-matrice inférieure droite de $[H'(s)]$. Désignons alors par $H_{ik}(s)$ la i-ème composante de $X_k(s)$. Elle représente la fonction de transfert entre les coordonnées généralisées de rangs i et k

$$H_{ik}(s) = \sum_p^n \left(\frac{b_{pk}\,b_{pi}}{d_p^o\,(s-\delta_p)} + \frac{b_{pk}^*\,b_{pi}^*}{d_p^{o*}\,(s-\delta_p^*)} \right) \tag{14.50}$$

Avec l'écriture simplifiée

$$R_{ik}^p = \frac{b_{pk}\,b_{pi}}{d_p^o} \tag{14.51}$$

la relation (14.50) devient

$$H_{ik}(s) = \sum_p^n \left(\frac{R_{ik}^p}{s-\delta_p} + \frac{R_{ik}^{p*}}{s-\delta_p^*} \right) \tag{14.52}$$

Revenons aux notations matricielles en introduisant les matrices $[R^p]$ et $[R^{p*}]$, d'ordre n. La matrice $[H(s)]$ des fonctions de transfert, d'ordre n également, a dès lors pour expression

$$[H(s)] = \sum_p^n \left(\frac{[R^p]}{s-\delta_p} + \frac{[R^{p*}]}{s-\delta_p^*} \right) \tag{14.53}$$

La comparaison des relations (14.53) et (14.36) montre que les matrices $[R^p]$ constituent les sous-matrices inférieures droites des matrices $[R'^p]$. Les termes R_{ik}^p sont donc les résidus au pôle δ_p et sont égaux, à un facteur près, aux composantes b_{pi} du vecteur propre $\boldsymbol{b}_p$.

La matrice $[H'(s)]$ étant symétrique, la matrice $[H(s)]$ l'est également. D'autre part, pour une valeur $s=\delta_p$, toutes les colonnes de $[H(s)]$ sont proportionnelles au vecteur propre $\boldsymbol{b}_p$. Il en résulte que la connaissance d'une seule ligne ou d'une seule colonne de $[H(s)]$ suffit, compte tenu des résultats (14.36) et (14.37), à la détermination de tous les n vecteurs propres $\boldsymbol{b}_p$.

La matrice des fonctions de transfert $[H(s)]$ permet en outre de trouver la réponse du système à une excitation quelconque, au moyen de la relation

$$\boldsymbol{X}(s) = [H(s)]\,\boldsymbol{F}(s) \tag{14.54}$$

En principe, on peut ainsi déterminer une colonne de $[H(s)]$ lorsqu'on impose une impulsion à un seul degré de liberté de la structure et que l'on mesure la réponse selon tous les degrés de liberté choisis initialement. Réciproquement, il est possible de déterminer une ligne de $[H(s)]$ en mesurant la réponse de la structure selon un seul degré de liberté pour des impulsions fournies à tous les degrés de liberté.

En pratique, la démarche est moins simple car les analyseurs numériques de signaux disponibles actuellement sont basés sur la transformée de Fourier discrète (FFT analyser). Ils permettent d'établir, non pas les fonctions de transfert $H_{ik}(s)$ de la variable complexe s de Laplace, mais seulement les réponses en fréquence $H_{ik}(\omega)$ dont l'expression analytique peut être obtenue en remplaçant s par $j\omega$ dans $H_{ik}(s)$.

Cette situation est illustrée par la figure 14.1. Les parties réelle et imaginaire de $H_{ik}(s)$ décrivent des surfaces dont les intersections avec les plans verticaux O23 et O23′ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de $H_{ik}(\omega)$.

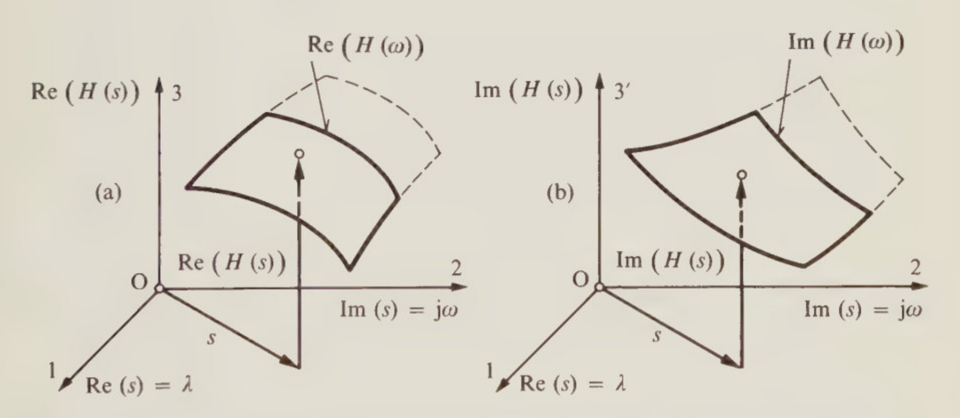


Fig. 14.1 Fonction de transfert $H(s) = H_{ik}(s)$ entre les coordonnées généralisées de rangs i et k
(a) Partie réelle de $H(s)$; l'intersection de la surface avec le plan O23 donne la partie réelle de la réponse en fréquence $H(\omega)$
(b) Partie imaginaire de $H(s)$; l'intersection de la surface avec le plan O23′ donne la partie imaginaire de $H(\omega)$

Le fait que seule la réponse en fréquence $H(\omega)$ soit accessible expérimentalement entraîne une perte d'information qui rend difficile la détermination des amortissements modaux. Cependant, la capacité de stockage, de visualisation et de traitement des réponses en fréquence qu'autorisent les analyseurs informatisés actuels rendent possible, au moyen d'une procédure adéquate, d'obtenir les grandeurs modales avec une précision et une fiabilité tout à fait suffisantes dans la plupart des cas.

Nous n'aborderons pas ici l'étude de cette procédure, ni celle des algorithmes qui lui sont attachés, car notre objectif se limite à l'exposé du principe de l'analyse modale expérimentale. Nous nous bornerons à signaler que l'opérateur, pour une plage de fréquences déterminée et sur la base d'un examen visuel d'une ou plusieurs réponses en fréquence, sélectionne le nombre de modes et leurs fréquences approximatives. Des

algorithmes appropriés permettent alors de trouver une nouvelle approximation des fréquences modales ainsi qu'une première approximation des amortissements modaux. Ensuite, des méthodes d'ajustement de courbes sur des points de mesure (curve fitting techniques) permettent de déterminer les valeurs et vecteurs propres. Ainsi, pour chaque réponse en fréquence $H_{ik}(\omega)$ d'un système comportant n degrés de liberté, il faut ajuster $4n+2$ paramètres, à savoir

- $2n$ paramètres pour les n valeurs propres complexes,
- $2n$ paramètres pour les composantes de rang p de chacun des n vecteurs propres complexes,
- 2 paramètres pour les deux termes tenant compte, l'un des modes situés en-dessous, l'autre des modes situés au-dessus de la bande de fréquence choisie pour l'analyse.

Une fois les divers paramètres modaux ainsi déterminés, le comportement de la structure peut être décrit de manière convenable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAUGHEY, T.K., O'KELLY, M.E.J. – *Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems,* J. Appl. Mech., sept. 1965, 583–588.

[2] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. – *Dynamic of Structures,* McGraw-Hill, 1975.

[3] DEN HARTOG, J.P. – *Vibrations mécaniques* (2e ed.), Dunod, Paris, 1960.

[4] DIMENTBERG, F.M. – *Flexural Vibrations of Rotating Shafts,* Butterworth, London, 1961.

[5] FERTIS, D.G. – *Dynamics and Vibrations of Structures,* Krieger, Melbourne FL, 1983.

[6] FILIPPOV, A.P. – *Vibrations of Mechanical Systems,* (trad. Reif, Z.F), National Lending Library, Boston Spa, 1971.

[7] FRAZER, R.A., DUNCAN, W.J., COLLAR, A.R. – *Elementary Matrices,* Cambridge Univ. Press., N.Y., 1957.

[8] HARKER, R.J. – *Generalized Methods of Vibration Analysis,* J. Wiley and Sons, N.Y., 1983.

[9] HARRIS, C.M., CREDE, C.E. – *Shock and Vibration Handbook* (2e ed. 3 vol.), McGraw Hill, 1976.

[10] HURTY, W.C., RUBINSTEIN, M.F. – *Dynamics of Structures,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[11] KLOSTERMANN, A.L. – *On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics,* University of Cincinnati, Thesis, 1971.

[12] KLOTTER, K. – *Technische Schwingungslehre* (2 vol.), Springer, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1980–81.

[13] KOLSKY, H. – *Stress Waves in Solids,* Dover, N.A., 1963.

[14] LALANNE, M., BERTHIER, P., DER HAGOPIAN, J. – *Mécanique des vibrations linéaires* (2e ed.), Masson, Paris, 1986.

[15] LUR'É, L. – *Mécanique analytique,* (tomes I et II), Masson, Paris, 1968.

[16] MATHEY, R. – *Physique des vibrations mécaniques,* Dunod, Paris, 1963.

[17] MAZET, R. – *Mécanique vibratoire* (2e ed.), Dunod, Paris, 1966.

[18] MEIROVITCH, L. – *Analytical Methods in Vibrations,* Macmillan Company, N.Y., 1967.

[19] MEIROVITCH, L. – *Elements of Vibration Analysis,* McGraw-Hill, 1975.

[20] MÜLLER, P.C. – *Stabilität und Matrizen,* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[21] NASHIF, A.D., JONES, D.I.G., HENDERSON, J.P. – *Vibration Damping,* J. Wiley and Sons, N.Y., 1985.

[22] PARLETT, B.N. – *The Symmetric Eigenvalue Problem,* Prentice-Hall, 1980.

[23] PREUMONT, A. – *Vibrations aléatoires et analyse spectrale,* Presses polytechniques romandes, Lausanne 1988.

[24] RAO J.S., GUPTA, K. – *Theory and Practice of Mechanical Vibrations,* Wiley East, Ltd, 1984.

[25] Rayleigh, Lord – *The Theory of Sound,* Vol. 1, Dover, N.Y., 1945.
[26] Rocard, Y. – *Dynamique générale des vibrations* (4e ed.), Masson, Paris, 1971.
[27] Roseau, M. - *Vibrations des systèmes mécaniques,* Masson, Paris, 1984.
[28] Salles, F., Lesueur, C. – *Les vibrations mécaniques,* ed. Masson, Paris, 1972.
[29] Sneddon, I.N. – *Fourier Transforms,* McGraw-Hill, N.Y., 1951.
[30] Soutif, M. *Vibrations, propagation, diffusion,* Dunod, Paris, 1970.
[31] Steidel, R.F. – *An Introduction to Mechanical Vibrations,* (2nd ed.), J. Wiley and Sons, 1980.
[32] Thomson, W.T. – *Theory of Vibrations with Applications* (2nd ed.), Prentice-Hall, 1981.
[33] Timoshenko, S. – *Théorie des vibrations,* Béranger, Paris, 1954.
[34] Timoshenko, S., Young, D.H., Weaver, W. – *Vibration Problems in Engineering* (4th ed.), J. Wiley and Sons, N.Y., 1974 (édition anglaise de l'ouvrage ci-dessus).
[35] Tse, F.S., Morse, I.E., Minkle, R.T. *Mechanical Vibrations* (2nd ed.), Allyn & Bacon, 1978.
[36] Wylie, R.C., Barrett, L.C. – *Advanced Engineering Mathematics* (5th ed.), McMillan, 1982.

INDEX

- Les nombres qui suivent le terme recherché renvoient aux pages correspondantes du livre
- Quand plusieurs nombres sont donnés, la référence principale est indiquée (les références principales sont indiquées) en chiffres gras
- Quand cela est nécessaire à la bonne compréhension des termes de l'Index (donc pas d'une manière systématique), la nature du système est précisée au moyen des abréviations suivantes:
  O2: oscillateur à deux degrés de liberté
  OG: oscillateur généralisé à n degrés de liberté

Noms propres

Noms communs

LISTE DES SYMBOLES

- Nous avons utilisé uniquement les lettres latines et grecques et nous avons recouru le moins possible aux indices. Dès lors, il est inévitable que certains symboles aient plusieurs significations. Ainsi, par exemple, T représente l'énergie cinétique d'un système, la tension dans un fil ou la période d'une grandeur oscillatoire. La confusion n'est cependant guère probable.
- Les symboles n'apparaissant que de manière fugitive, en particulier dans les exemples d'application, ne sont pas mentionnés dans la liste.
- Quand cela est nécessaire à une identification précise des symboles de la liste (donc pas d'une manière systématique), les abréviations suivantes sont indiquées:

  O2: oscillateur à 2 degrés de liberté
  OG: oscillateur généralisé (à n degrés de liberté)
  OGA: oscillateur généralisé conservatif
  OGB: oscillateur généralisé dissipatif avec modes réels (la condition de Caughey est respectée)
  OGC: oscillateur généralisé dissipatif avec modes complexes (cas général; la condition de Caughey n'est pas respectée).

Symboles généraux

Il est utile de définir la signification, dans ce livre, de quelques symboles de portée générale.

$u(t)$	fonction du temps
$\dot{u}(t)$	première dérivée de $u(t)$ par rapport au temps
$\ddot{u}(t)$	seconde dérivée de $u(t)$ par rapport au temps
$\boldsymbol{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$	vecteur comportant n composantes v_i
$\boldsymbol{v}^T = \{v_1 ... v_n\}$	vecteur transposé de $\boldsymbol{v}$
$\lVert \boldsymbol{v} \rVert$	norme du vecteur $\boldsymbol{v}$
$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$	symbole imaginaire
$\underline{N}$	nombre complexe
$\underline{N}^*$	conjugé du nombre complexe $\underline{N}$
$\mathrm{Re}\ \underline{N}$	partie réelle du nombre complexe $\underline{N}$
$\mathrm{Im}\ \underline{N}$	partie imaginaire du nombre complexe $\underline{N}$ *Remarque:* les nombres complexes ne sont plus soulignés à partir de la section 12.4, page 189
$i, j, k, l, m, n, r, s, t, \alpha$	indices, nombre entiers
π	rapport de la circonférence au rayon (= 3, 1416)

Π	symbole produit
Σ	symbole de sommation
$[M]$	matrice M, carrée, d'ordre n
$[M]^a$	adjointe de la matrice $[M]$
$\lceil M^o \rfloor$	matrice diagonale, d'ordre n

Alphabet latin

a	vitesse de propagation des ondes élastiques dans un solide
a	partie réelle de la réponse complexe en fréquence
A	aire d'une section
A	constante réelle (en particulier, constante d'intégration)
A_n	coefficient du terme en cosinus, de rang n, d'une série de Fourier
$\underline{A}$	constante complexe
$[A]$	matrice noyau (OGA, ordre n)
b	partie imaginaire de la réponse en fréquence
$\boldsymbol{b}$	vecteur propre
B	constante réelle (en particulier, constante d'intégration)
B_n	coefficient du terme en sinus, de rang n, d'une série de Fourier
$\underline{B}$	constante complexe
$\boldsymbol{B}_p$	vecteur propre de la matrice $[B]$ (OGA, B, ordre n; OGC, ordre $2n$)
$[B]$	matrice de changement de base (OGA, B, ordre n; OGC, ordre $2n$)
c	constante d'amortissement visqueux linéaire (ou résistance linéaire)
c'	constante d'amortissement critique
c_j	résistance d'indice j agissant sur une masse ponctuelle (système coplanaire, O2)
c_p^o	constante d'amortissement modale du mode propre de rang p (OGB)
C	capacité électrique
C_0	demi-valeur moyenne d'une force périodique ($= 1/2\ F_0$)
$\underline{C}_n$	amplitude complexe du terme $e^{jn\omega t}$ d'une série de Fourier sous forme complexe ($\underline{C}_n^*$ = conjugué de $\underline{C}_n$)
$[C]$	matrice d'amortissement (ou matrice des pertes) (OG, ordre n)
$\lceil C^o \rfloor$	matrice diagonale des constantes d'amortissement modales (OGB, ordre n)
$d(t)$	réponse impulsionnelle (réponse d'un oscillateur à une impulsion de force)
d_p^o	terme complexe de rang p de la matrice diagonale $\lceil D^o \rfloor$ (d_r^o, idem rang r)
D_p^o	module du terme complexe d_p^o
$D(s)$	transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac ($= 1$)
$\underline{D}_n$	amplitude complexe de l'harmonique de rang n d'une série de Fourier sous forme complexe
$[D]$	matrice relative à un oscillateur dissipatif (OGC, ordre $2n$)
$\lceil D^o \rfloor$	matrice diagonale relative à un oscillateur dissipatif (OGC, ordre $2n$)

$e(t)$	réponse indicielle (réponse d'un oscillateur à un échelon de force)
E	module d'élasticité (ou module de Young)
$E(s)$	transformée de Laplace d'un échelon de force
E_s	déplacement statique dû à un échelon de force
$[E]$	matrice inverse du noyau (= $[A]^{-1}$, OGA, ordre n)
f	fréquence d'une grandeur oscillatoire ($f = \omega/2\pi$, voir lettre ω)
$f(t)$	force extérieure appliquée à un système; fonction du temps
$f_c(t)$	force de frottement visqueux
$f_i(t)$	force extérieure relative à la coordonnée généralisée $x_i(t)$
$f_k(t)$	force de rappel élastique
$f_m(t)$	force d'inertie
$\underline{f}(t)$	force extérieure complexe
$\boldsymbol{f}(t)$	vecteur des forces extérieures appliquées à un système
$\boldsymbol{f}^o(t)$	vecteur des forces modales (OGA, B ordre n)
F	amplitude d'une force harmonique
$F(s)$	transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$
$F'(s)$	transformée de Carson-Laplace d'une fonction $f(t)$
F_n	amplitude de l'harmonique de rang n d'une force périodique
F_0	valeur moyenne d'une force périodique
$\underline{F}(\omega)$	transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$
$[F]$	matrice noyau pour un oscillateur dissipatif (OGC, ordre $2n$)
g	constante de gravitation terrestre (= 9,81 m/s^2)
$g(t)$	réponse d'un oscillateur à un échelon de déplacement
g_r^o	terme de rang r de la matrice diagonale $\lceil G^o \rfloor$
$[G]$	matrice relative à un oscillateur dissipatif (OGC, ordre $2n$)
$\lceil G^o \rfloor$	matrice diagonale relative à un oscillateur dissipatif (OGC, ordre $2n$)
$h(t)$	réponse d'un oscillateur à une impulsion de déplacement
H	énergie totale d'un oscillateur (d'un système)
H	fonction de Hamilton (ou Hamiltonien, = $T+V$)
$H(s)$	réponse opérationnelle d'un oscillateur
H_d	énergie perdue sur une période par un oscillateur dissipatif
H_0	énergie totale initiale d'un oscillateur dissipatif
$H_{ik}(s)$	fonction de transfert entre les déplacements de rangs i et k
$H_{ik}(\omega)$	réponse en fréquence entre les déplacements de rangs i et k
$\bar{H}$	énergie totale moyenne d'un oscillateur dissipatif
$\underline{H}$	réponse complexe en fréquence
$\underline{H}_0$	réponse complexe à la fréquence propre de l'oscillateur conservatif, ainsi qu'aux résonances de phase, de puissance et de vitesse
$\underline{H}_1$	réponse complexe à la fréquence propre de l'oscillateur dissipatif
$\underline{H}_2$	réponse complexe à la résonance d'amplitude
$\underline{H}_3$	réponse complexe à la résonance d'accélération
$\underline{H}_n$	réponse complexe en fréquence de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique
$[H(s)]$	matrice des fonctions de transfert (OGC, ordre n)

$[H'(s)]$	matrice augmentée des fonctions de transfert (ou admittance matricielle opérationnelle) (OGC, ordre $2n$)
$i(t)$	courant électrique
I	amplitude d'un courant électrique alternatif
I	moment d'inertie d'une aire plane par rapport à un axe (moment d'inertie à la flexion)
I_p	moment d'inertie polaire d'une aire plane (moment d'inertie à la torsion)
$\lceil I \rfloor$	matrice unité (ou matrice identité)
J	moment d'inertie d'un solide
k	rigidité d'un élément élastique
k_e	rigidité équivalente d'un système élastique
k_i	rigidité d'un ressort d'indice i agissant sur une masse ponctuelle (système coplanaire, O2)
k_{ij}	rigidité de couplage entre les coordonnées généralisées x_i et x_j $(= k_{ji})$
k_p^o	rigidité modale du mode propre de rang p (k_r^o, idem rang r)
$[K]$	matrice de rigidité (ou matrice de raideur) (OG, ordre n)
$\lceil K^o \rfloor$	matrice diagonale des rigidités modales (OGA, B, ordre n)
L	distance, longueur d'une poutre
L	self-inductance
L	fonction de Lagrange (ou Lagrangien), $(= T-V)$
$\mathscr{L}(f(t))$	transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, $(= F(s))$
m	masse d'un oscillateur (d'un système)
m_{ij}	masse généralisée (ou coefficient d'inertie) $(= m_{ji})$
m_a	masse de rang a d'un système de masses ponctuelles
$[M]$	matrice des masses (ou matrice d'inertie) (OG, ordre n)
$\lceil M^o \rfloor$	matrice diagonale des masses modales (OGA, B, ordre n)
$\lvert M \rvert$	déterminant de la matrice des masses
n	vitesse de rotation (en tours par minute)
p	pression
p	racine de l'équation caractéristique (O2)
$p(t)$	puissance instantanée consommée par un oscillateur, en régimes libre ou permanent
$p_k(t)$	quantité de mouvement généralisée
$p_p^o(t)$	force modale complexe de rang p
$\bar{p}$	puissance moyenne consommée par un oscillateur en régime permanent
$\bar{p}_0$	puissance moyenne consommée par un oscillateur à la résonance de puissance, en régime permanent
$\boldsymbol{p}(t)$	vecteur des quantités de mouvement généralisées
$\boldsymbol{p}(t)$	vecteur des forces extérieures (OGC, ordre $2n$)

$\boldsymbol{p}^o(t)$	vecteur des forces modales (OGC, ordre $2n$)
$\boldsymbol{P}(s)$	vecteur des transformées de Laplace des forces extérieures (OGC, ordre $2n$)
$q_p(t)$	coordonnée normale (ou modale, ou découplée) de rang p
$\boldsymbol{q}(t)$	vecteur des coordonnées normales (OGA, B, ordre n; OGC, ordre $2n$)
Q	facteur de qualité d'un oscillateur
Q_i	force généralisée s'appliquant sur un système élastique
Q_p	amplitude de la fonction harmonique $q_p(t)$
$Q_p(s)$	transformée de Laplace de $q_p(t)$
$\boldsymbol{Q}$	vecteur des forces généralisées Q_j s'appliquant sur un système élastique
r	racine d'une équation caractéristique
R	constante des gaz
R	rayon d'un cercle (d'un cylindre, d'une poulie, etc...)
R	résistance électrique
$R(s)$	abscisse de convergence d'une transformée de Laplace
$R(t)$	rayon de la spirale du plan de phase
$R(\boldsymbol{u})$	quotient de Rayleigh
R_{ik}^p	résidus au pôle δ_p
$[R^p]$	matrice des résidus au pôle δ_p (OGC, ordre n)
$[R'^p]$	matrice augmentée des résidus au pôle δ_p (OGC, ordre $2n$)
s	variable de Laplace
s_{ij}	terme d'une matrice symétrique ($= s_{ji}$)
$[S]$	matrice symétrique
t	temps
T	énergie cinétique d'un oscillateur (d'un système)
T	tension dans un fil ou une corde
T	période d'une grandeur oscillatoire ($= 2\pi/\omega$, voir lettre ω)
T_0	période de l'oscillateur conservatif
T_1	période de l'oscillateur dissipatif
u	variable auxiliaire d'une intégrale de convolution
u	tension électrique
$\boldsymbol{u}$	vecteur propre approché (OG, ordre n)
U	amplitude d'une tension électrique alternative
$[U]$	matrice inverse du noyau d'un oscillateur dissipatif ($= [F]^{-1}$, OGC, ordre $2n$)
v	vitesse du déplacement
v_a	vitesse d'une masse ponctuelle m_a
V	volume
V	amplitude d'une vitesse harmonique
V	énergie potentielle d'un oscillateur (d'un système)
V_0	vitesse initiale

V_{∞}	énergie potentielle communiquée à un oscillateur par un échelon de force (réponse indicielle)
$\boldsymbol{V}_0$	vecteur des vitesses initiales (OG, ordre n)
w_p	inverse de la valeur propre δ_p
W	fonction de dissipation (demi-puissance dissipée)
$x(t)$	déplacement d'un oscillateur
$\dot{x}(t)$	vitesse (du déplacement)
$\ddot{x}(t)$	accélération (du déplacement)
$x_1(t)$, $x_2(t)$	déplacements généralisés d'un oscillateur à 2 degrés de liberté (y compris l'amortisseur de Frahm)
$x_a(t)$	déplacement dû à une force extérieure (inverse de $Y(s)\ F(s)$)
$x_b(t)$	déplacement correspondant aux conditions initiales X_0, V_0
$x_e(t)$	déplacement élastique
$x_i(t)$	coordonnée généralisée (déplacement généralisé) de rang i
$x_{ip}(t)$	coordonnée généralisée (déplacement généralisé) de rang i dans le mode propre de rang p
$x'(t)$	solution particulière (déplacement) de l'équation différentielle avec second membre
$x''(t)$	solution générale (déplacement) de l'équation différentielle sans second membre
$\underline{x}(t)$	déplacement complexe
$\underline{x}_e(t)$	déplacement élastique complexe
$\boldsymbol{x}(t)$	vecteur des déplacements (OG, ordre n)
$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$	vecteur des vitesses (OG, ordre n)
$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$	vecteur des accélérations (OG, ordre n)
$\boldsymbol{x}_p(t)$	mode propre de rang p
X	amplitude d'un déplacement harmonique
$X(s)$	transformée de Laplace du déplacement $x(t)$
X_0	déplacement initial
X_1, X_2	amplitudes des déplacements harmoniques d'un oscillateur à 2 degrés de liberté (y compris l'amortisseur de Frahm)
X_p	amplitude de référence pour le mode propre de rang p
X_n	amplitude de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique
X_s	déplacement statique
X_{sn}	déplacement statique de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique
X'	amplitude de référence du mode $\boldsymbol{x}_r(t)$ provoqué par les conditions initiales $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{V}_0$ (OGC)
$X_e(s)$	transformée de Laplace du déplacement élastique $x_e(t)$
$\underline{X}$	amplitude complexe du déplacement
$\underline{X}(\omega)$	transformée de Fourier du déplacement $x(t)$
$\underline{X}_{sn}$	déplacement statique complexe de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique
$\boldsymbol{X}(s)$	vecteur des transformées de Laplace des déplacements (OG, ordre n)

$\boldsymbol{X}_k(s)$ vecteur des transformées de Laplace des déplacements $x_{ik}(t)$ dus à une impulsion selon le déplacement x_k (OG, ordre n)
$\boldsymbol{X}_0$ vecteur des déplacements initiaux (OG, ordre n)
$\boldsymbol{X}_p$ forme propre de rang p (vecteur des amplitudes du mode propre de rang p) (OGA, B, ordre n)

$y(t)$ admittance temporelle
$\boldsymbol{y}(t)$ vecteur des vitesses et des déplacements (OGC, ordre $2n$)
$Y(s)$ admittance opérationnelle
$\underline{Y}$ admittance complexe
$\underline{Y}_n$ admittance complexe de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique
$\boldsymbol{Y}_0$ vecteur des vitesses initiales et des déplacements initiaux (OGC, ordre $2n$)
$\boldsymbol{Y}(s)$ vecteur des transformées de Laplace des vitesses et déplacements (OGC, ordre $2n$)

z variable auxiliaire pour le calcul des intégrales de convolution ($= t-u$)
$Z(s)$ impédance opérationnelle
Z_a^k coordonnée cartésienne d'une masse ponctuelle m_a
$\underline{Z}$ impédance complexe
$\boldsymbol{Z}_k^a$ vecteur colonne de la matrice adjointe à $[Z(s=\delta_p)]$ (OGC,ordre $2n$)
$[Z(s)]$ impédance matricielle opérationnelle (OGC, ordre $2n$)

Alphabet grec

α angle, phase, déphasage
α rapport des pulsations propres dans un amortisseur de Frahm ($= \omega_2/\omega_1$)
α_i coefficient réel quelconque
α_i angle définissant la direction du ressort d'indice i agissant sur une masse ponctuelle (système coplanaire, O2)
α_{ij} coefficient d'influence entre les coordonnées x_i et x_j ($= \alpha_{ji}$)
α_p argument du terme complexe d_p^o
$[\alpha]$ matrice des coefficients d'influence

β angle, phase, déphasage
β pulsation relative d'une force extérieure harmonique ($= \omega/\omega_0$)
β_{ip} amplitude relative de la coordonnée $x_{ip}(t)$ du mode propre de rang p (β_{ir}, idem rang r)
$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{matrix}\right\}$ vecteurs propres d'un oscillateur à 2 degrés de liberté
$\boldsymbol{\beta}_p$ forme propre de rang p (vecteur des amplitudes relatives du mode propre de rang p), $\boldsymbol{\beta}_r$, $\boldsymbol{\beta}_s$, idem rangs r et s)

γ exposant isentropique d'un gaz
γ angle, dans le plan de phase, entre la tangente à la spirale et la normale au rayon

γ_p constante multiplicative, réelle ou complexe
γ vecteur des constantes γ_p

δ flèche, déplacement statique
δ_p valeur propre de rang p
δ_{rs} symbole de Kronecker ($= 1$ *si* $r = s$; $= 0$ *si* $r \neq s$)
$[\Delta]$ matrice diagonale des valeurs propres δ_p (OGA, B ordre n; OGC, ordre $2n$)

ε déformation relative dans un matériau
ε puissance relative en régime permanent ($= \bar{p}/\bar{p}_0$)
ε rapport des masses dans un amortisseur de Frahm ($= m_2/m_1$)
ε_{max} puissance relative à la résonance de puissance

η amortissement relatif (ou facteur d'amortissement)
η_p amortissement relatif modal du mode propre de rang p (ou facteur d'amortissement modal)

θ angle, angle de rotation d'un système
$\theta_p(t)$ argument de la force modale complexe $p^o(t)$

θ'_p, θ''_p angles des axes principaux de la trajectoire d'une masse d'un système coplanaire de ressorts et de résistances linéaires

λ coefficient d'amortissement
λ_p coefficient d'amortissement modal du mode propre de rang p
Λ décrément logarithmique
$[2\Lambda]$ matrice diagonale des amortissements modaux (OGB, ordre n)
μ coefficient de frottement sec (frottement de Coulomb)
μ facteur d'amplification dynamique
μ_1 masse linéique (masse par unité de longueur)
μ_0 facteur d'amplification dynamique à la résonance de phase
μ_{max} facteur d'amplification dynamique à la résonance d'amplitude
μ_n facteur d'amplification dynamique de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique

ξ_j angle définissant la direction de la résistance d'indice j agissant sur une masse ponctuelle (système coplanaire)

ρ masse spécifique d'un corps (d'un matériau)

σ contrainte normale (de traction, de flexion, ...)

τ constante d'amortissement d'un polymère
τ fonction de fréquence ($= 1/\delta$)

φ angle, déphasage entre deux grandeurs oscillatoires

$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{matrix}\right\}$ déphasages des déplacements d'un oscillateur à 2 degrés de liberté

φ_n déphasage de l'harmonique de rang n d'un déplacement périodique

φ_p déphasage du mode propre de rang p (OG)

φ_{0r} déphasage du mode $\boldsymbol{x}_r(t)$ provoqué par les conditions initiales $\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{X}_0$ (OGC)

Φ flux magnétique

ψ_n déphasage de l'harmonique de rang n d'une force périodique

ψ_{ip} déphasage complémentaire du déplacement $x_{ip}(t)$ d'un mode propre complexe de rang p (OGC) (ψ_{ir}, idem rang r)

ω pulsation d'une grandeur oscillatoire

ω_0 $\left\{\begin{matrix}\text{pulsation propre de l'oscillateur conservatif}\\\text{pulsation de résonance de phase}\\\text{pulsation de résonance de puissance}\\\text{pulsation de résonance de vitesse}\end{matrix}\right.$

ω_1 pulsation propre de l'oscillateur dissipatif

ω_2 pulsation de résonance d'amplitude

ω_3 pulsation de résonance d'accélération

$\left.\begin{matrix}\omega_1\\\omega_2\end{matrix}\right\}$ pulsations propres d'un oscillateur à 2 degrés de liberté

ω_p pulsation propre du mode de rang p

$\left.\begin{matrix}\Omega_1\\\Omega_2\end{matrix}\right\}$ pulsations de couplage à zéro d'un oscillateur à 2 degrés de liberté

Ω_{12}^4 terme représentant le couplage élastique d'un oscillateur à 2 degrés de liberté

$[\Omega_0^2]$ matrice diagonale des pulsations propres d'un oscillateur avec modes réels (OGA, B, ordre n)

